Exercice - M0193C

Nous avons les points suivants

$$A\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix} \quad P\begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix} \quad M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Et les affixes respectifs

$$a = 5+5i \quad b = 5-5i \quad p = 10 \quad z = x+yi \quad u = i(10-z) \quad t = i(z-10)$$

1) Montrons que le quadrilatère $MUDT$ est un parallélogramme.

D est le symétrique de M par rapport au point O. Autrement dit O est le milieu du segment $[MD]$. Calculons l'affixe du milieu du segment $[UT]$.

$$\frac{u+t}{2} = \frac{i(10-z)+i(z-10)}{2} = \frac{10i - iz + iz - 10i}{2} = 0$$

Donc O est également le milieu du segment $[UT]$.

Conclusion : $[MD]$ et $[UT]$ ont même milieu, le quadrilatère $MUDT$ est un parallélogramme.

2) On recherche les points M tels que $z\bar{z} - 5z - 5\bar{z} = 0$.

$$\begin{aligned} z\bar{z} - 5z - 5\bar{z} &= |z|^2 - 5(z+\bar{z}) \\ &= |z|^2 + 5 \times 2\Re z \\ &= x^2 + y^2 - 10x \\ &= (x-5)^2 + y^2 - 25 \quad = |z-5|^2 - 25 \end{aligned}$$

Donc

$$z\bar{z} - 5z - 5\bar{z} = 0 \iff |z-5|^2 - 25 = 0 \iff |z-5| = 5$$

Conclusion : La distance des points M de l'ensemble Γ au point d'affixe 5 est égale à 5, donc Γ est un cercle de centre $C(0;5)$ et de rayon 5.

Calculons les distances OC, AC, PC et BC.

$$\begin{aligned} OC &= |c-0| = |5-0| = 5 \\ AC &= |c-a| = |5-(5+5i)| = |-5i| = 5 \\ PC &= |10-5| = 5 \\ BC &= |c-b| = |5-(5-5i)| = |5i| = 5 \end{aligned}$$

Donc $OC = AC = PC = BC = 5$. Les points sont cocycliques. (Ils sont tous sur le cercle de centre C et de rayon 5.

3a) M est un point disctint de O, A et P. Montrons que :

$$O, M, U \text{ sont alignes } \iff \frac{u}{z} = \frac{\bar{u}}{\bar{z}}$$

$$\frac{u}{z} = \frac{\bar{u}}{\bar{z}} \iff \frac{u}{z} = \overline{\frac{u}{z}} \iff \frac{u}{z} \in \mathbb{R} \iff \arg\frac{u}{z} = 0$$

Donc la mesure de l'angle $\widehat{\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OM}} = 0 \pmod{\pi}$. Donc les points sont alignés.

3b) Montrons que O, M et U sont alignés si et seulement si $M \in \Gamma$. Nous avons déjà montré que les points O, M et U sont alignés si et seulement si $\frac{u}{z} = \frac{\bar{u}}{\bar{z}}$

$$
\begin{aligned}
O, M, U\text{aligne} &\iff \frac{u}{z} = \frac{\bar{u}}{\bar{z}} \\
&\iff \frac{i(10-z)}{z} = \frac{\overline{i(10-z)}}{\bar{z}} \\
&\iff \frac{i(10-z)}{z} = \frac{-i(10-\bar{z}}{\bar{z}} \\
&\iff 10\bar{z} - \bar{z}z = -10z + 10z\bar{z} \\
&\iff 2z\bar{z} - 10z - 10\bar{z} = 0 \\
&\iff z\bar{z} - 5z - 5\bar{z} = 0 \\
&\iff M \in \Gamma
\end{aligned}
$$

Conclusion : Les points O, M et U sont alignés si et seulement le si le point M appartient à Γ.

4) Déterminons l'ensembles des points M tels que OMU soit un triangle isocèles en O. OMU est isocl̀e donc

$$
OM = OU \iff |z| = |u| \iff |z| = |i(10-z)| \iff |z-0| = |z-10| \iff OM = MP
$$

OMU est donc isocèle en O si et seulement si M est sur la médiatrice du segment $[OP]$

$OM = OU$ entraine que $MD = UT$. Les diagonales du quadrilatère sont de longueur égales. Le quadrilatère $MUDT$ est un rectangle.

5) Déterminons l'ensemble des points M tels que $\frac{u}{z}$ soit imaginaire pur

$$
\begin{aligned}
\frac{u}{z} \in i\mathbb{R} &\iff \frac{u}{z} = -\overline{\frac{u}{z}} \\
&\iff \frac{u}{z} = \frac{\bar{u}}{\bar{z}} \\
&\iff \frac{i(10-z)}{z} = -\frac{\overline{i(10-z)}}{\bar{z}} \\
&\iff (10-z)\bar{z} = z(10-\bar{z}) \\
&\iff 10\bar{z} - z\bar{z} = 10z - z\bar{z} \\
&\iff z = \bar{z} \\
&\iff z \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Si M est sur la droite (OP) alors U est sur l'axe des imaginaire. Donc les diagonales du quadrilatère $MUDT$ sont perpendiculaires. C'est donc un losange.

6) $MUDT$ est un carré. Ses diagonales sont perpendiculaire donc M est sur l'axe réel. Ses diagonale sont de même longueur donc M est sur la médiatrice du segment $[OP]$, donc M a pour coordonnées $(0; 5)$.

La figure ci-dessous représent la situation avec $M(7;2)$ et dans le cas ou $MUDT$ est un carré