Exercice - M0196C

1) Soit n un entier naturel non nul, $A = n(n+1)$ et $B = (n-1)(n+2)$. Soit d le PGCD de A et B. Montrons que d divise 2.

$$A = n^2 + n \qquad B = n^2 + n - 2 \implies A - B = 2$$

d est un diviseur commun de A et B donc d divise $A - B$ et donc d divise 2. Autrement d vaut 1 ou 2.

Déterminons le PGCD de A et B. Examinons successivement le cas n puis n impair.

Cas n pair : $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Nous avons alors

$$A = 2k(2k+1) \qquad B = (2k-1)(2k+2) = 2(2k-1)(k+1)$$

A et B sont multiples de 2 et donc $d = 2$

Cas n imppair : $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Nous avons alors

$$A = (2k+1)(2k+1+1) = 2(2k+1)(k+1) \qquad B = (2k+1-1)(2k+1+2) = 2k(2k+3)$$

A et B sont multiples de 2 et donc $d = 2$

Conclusion : Pour tout entier n, le PGCD de $n(n+1)$ et $(n-1)(n+2)$ est 2

2) L'entier n étant supérieur ou égal à 2, on considère les nombres :

$$C = \frac{(n-1)(n+2)}{2} \qquad D = \frac{(n-2)(n+3)}{2}$$

Calculons $C - D$

$$C - D = \frac{(n-1)(n+2)}{2} - \frac{(n-2)(n+3)}{2} = \frac{n^2+n-2}{2} - \frac{n^2+n-6}{2} = 2$$

Soit d le PGCD de C et D. Alors d divise 2 et donc d vaut 1 ou 2 comme précedement.

Déterminons le PGCD de C et D en fonction du reste de la division de n par 4. La division euclidienne de n par 4 s'écrit $n = 4q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N} \quad 0 \leq r < 4$

Cas $r = 0$ donc $n = 4k \quad k \in \mathbb{N}$:

$$C = \frac{(4k-1)(4k+2)}{2} = (4k-1)(2k+1) \qquad D = \frac{(4k-2)(4k+3)}{2} = (k-1)(4k+3)$$

C est impair, donc n'est pas divisible par 2, le PGCD de C et D est 1.

Cas $r = 1$ donc $n = 4k+1 \quad k \in \mathbb{N}$:

$$C = \frac{(4k+1-1)(4k+1+2)}{2} = 2k(4k+3) \qquad D = \frac{(4k+1-2)(4k+1+3)}{2} = 2(4k-1)(k+1)$$

C et D sont multiples de 2. Le PGCD de C et D est 2.

Cas $r = 2$ donc $n = 4k+2 \quad k \in \mathbb{N}$:

$$C = \frac{(4k+2-1)(4k+2+2)}{2} = 2(4k+1)(k+1) \qquad D = \frac{(4k+2-2)(4k+2+3)}{2} = 2k(4k+5)$$

C et D sont multiples de 2. Le PGCD de C et D est 2.

Cas $r = 3$ donc $n = 4k+3 \quad k \in \mathbb{N}$:

$$C = \frac{(4k+3-1)(4k+3+2)}{2} = (2k{+}1)(4(k{+}1){+}1) \qquad D = \frac{(4k+3-2)(4k+3+3)}{2} = (4k{+}1)(2k{+}3)$$

C est impair. Le PGCD de C et D est 1.

Conclusion : pour tout n entier naturel, le PGCD de $C = \dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$ et $D = \dfrac{(n-2)(n+3)}{2}$ est :

- 1 si le reste de la division de n par 4 est 0 ou 2
- 2 si le reste de la division de n par 4 est 1 ou