Exercice - M0210C

ABC est un triangle. On définit trois points A',B' et C' respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB) en posant :

$$\overrightarrow{A'C} = r\overrightarrow{A'B} \quad \overrightarrow{C'B} = p\overrightarrow{C'A} \qquad \overrightarrow{B'A} = q\overrightarrow{B'C}$$

ou p, q et r sont trois réels différents de 1. Plaçons nous dans le référentiel $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et déterminons les coordonnées des différents points. Nous avons trivialement $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(0,1)$.

Pour le point A'

$$\overrightarrow{A'C} = r\overrightarrow{A'B} \implies \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC} = r(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB}) \implies (1-r)\overrightarrow{A'A} = r\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

On en déduit

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{r}{r-1}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{r-1}\overrightarrow{AC}$$

Pour le point B'

$$\overrightarrow{B'A} = q\overrightarrow{B'C} \implies \overrightarrow{B'A} = q\overrightarrow{B'A} + q\overrightarrow{AC} \implies (1-q)\overrightarrow{B'A} = q\overrightarrow{AC}$$

On en déduit

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{q}{q-1}\overrightarrow{AC}$$

Pour le point C'

$$\overrightarrow{C'B} = p\overrightarrow{C'A} \implies \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AB} = p\overrightarrow{C'A} \implies (1-p)\overrightarrow{C'A} = -\overrightarrow{AB}$$

On en déduit

$$\overrightarrow{AC'} = -\frac{1}{p-1}\overrightarrow{AB}$$

Ainsi

$$A(0,0) \quad B(1,0) \quad C(0,1) \quad A'\left(\frac{r}{r-1}, -\frac{1}{r-1}\right) \quad B'\left(0, \frac{q}{q-1}\right) \quad C'\left(-\frac{1}{p-1}, 0\right)$$

Déterminons une équation cartésienne de la droite (AA'). Soit M un point de cette droite. On doit avoir

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AA'}$$

Ce qui compte tenu des coordonnées nous donne

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} \dfrac{r}{r-1} \\ -\dfrac{1}{r-1} \end{pmatrix}$$

Et en écrivant le critère de colinéarité donne

$$x\frac{-1}{r-1} - y\frac{r}{r-1} = 0 \implies x + ry = 0$$

Déterminons une équation cartésienne de la droite (BB'). Soit M un point de cette droite. On doit avoir

$$\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{BB'}$$

Ce qui compte tenu des coordonnées nous donne

$$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{q}{q-1} \end{pmatrix}$$

Et en écrivant le critère de colinéarité donne

$$(x-1)\frac{q}{q-1} - y(-1) = 0 \implies qx - q + (q-1)y = 0 \implies qx - (1-q)y = q$$

Déterminons une équation cartésienne de la droite (CC'). Soit M un point de cette droite. On doit avoir

$$\overrightarrow{CM} = \lambda \overrightarrow{CC'}$$

Ce qui compte tenu des coordonnées nous donne

$$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{p-1} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Et en écrivant le critère de colinéarité donne

$$x(-1) - (y-1)\frac{-1}{p-1} = 0 \implies (1-p)x + y - 1 = 0 \implies (1-p)x + y = 1$$

Déterminons les coordonnées du point H intersection des droites (BB') et (CC'). Résolvons le système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} qx & - & (1-q)y & = q \\ (1-p)x & + & y & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} qx & - & (1-q)y & = q \\ (1-p)(1-q)x & + & (1-q)y & = 1-q \end{array}\right.$$

On en déduit alors x

$$(q + (1-p-(1-q))x = q + 1 - q \implies x = \frac{1}{q+(1-p)(1-q)}$$

Puis y

$$\begin{aligned} y &= 1 - (1-p)x \\ &= 1 - \frac{(1-p)}{q+(1-p)(1-q)} \\ &= \frac{q+(1-p)(1-q)-(1-p)}{q+(1-p)(1-q)} \\ &= \frac{q+(1-p)(1-q-1)}{q+(1-p)(1-q)} \\ &= \frac{q-(1-p)q}{q+(1-p)(1-q)} \\ &= \frac{q(1-(1-p))}{q+(1-p)(1-q)} \\ &= \frac{pq}{q+(1-p)(1-q)} \end{aligned}$$

Le point H a pour coordonnées

$$H\left(\frac{1}{q+(1-p)(1-q)}, \frac{pq}{q+(1-p)(1-q)}\right)$$

Le point H est sur la droite (AA') si et seulement si

$$x_H = -ry_h \iff \frac{1}{q+(1-p)(1-q)} = -r\frac{pq}{q+(1-p)(1-q)} \iff 1 = -pqr$$

L'interprétation géométrique est la suite. Le point A' est sur la droite (BC) le point B' sur la droite (AC) et le point C' sur la droite (AB). Une configuration simple est de placer les points A', B' et C' sur les cotés du triangle. Les droites issues des sommets sont alors concourrante si et seulement si

$$\frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = -1$$

La relation peut également être écrite avec les distance. Dans ce cas le produit est égal à 1.