Exercice - M0220C

1) Soit la fonction définie par :

$$f_1(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 7$$

f_1 est une fonction polynome. Elle est définie et dévirable sur $\mathbb{R}$. Calculons la dérivée de

$$f_1'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6) = 6(x-2)(x+3)$$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$		$\nearrow$	|	$\searrow$	|	$\nearrow$	

2) Soit fonction définie par :

$$f_2(x) = x^2 - 5x + 4$$

f_2 est une fonction polynome. Elle est définie est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculons la dérivée

$$f_2'(x) = 2x - 5$$

$$f_2'(x) \geq 0 \iff 2x - 5 \geq 0 \iff x \geq \frac{5}{2}$$

On en déduit le tableau de variation

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_2(x)$		$\searrow$	|	$\nearrow$	

3) Soit la fonction définie par :

$$f_3(x) = 3x + 1$$

f_3 est une fonction affine. Elle est définie est dérivable sur $\mathbb{R}$. Son coefficient directeur est 3, donc f_3 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Calculons la dérivée

$$f_3'(x) = 3$$

4) Soit la fonction définie par :

$$g_1(x) = \frac{4x-1}{2x+6}$$

g_1 est une fraction rationelle est plus exactementfonction homographique. Recherchons la valeur pour laquelle le dénominateur s'annule.

$$2x - 6 = 0 \iff x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

g_1 est définie est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \frac{(}{1}3$. Calculons sa fonction dérivée.

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{4x-1}{2x+6} \\ g_1'(x) &= \frac{4(2x+6) - 2(4x-1)}{{(}^2} \\ &= \frac{8x + 26 - 8x + 2}{(2x+6)^2} \\ &= \frac{26}{(2x+6)^2} \end{aligned}$$

Conclusion : g_1' est manifestement positive sur le domaine de définition, donc g_1 est strictement croissante sur D_{g_1}

$$g_1'(x) = \frac{26}{(2x+6)^2}$$

5) Soit la fonction définie par :

$$g_2(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$$

g_2 est une fonction polynome. Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculons la dérivée.

$$g_2'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3)$$

Etudions le signe, calculons le discriminant, puis les racines du trinome.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 6 \qquad x_1 = -1 \qquad x_2 = 3$$

D'ou le tableau de variation.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$g_2'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g_2(x)$		$\searrow$	|	$\nearrow$	|	$\searrow$	

6) Soit la fonction définie par :

$$g_3(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 3}$$

g_3 est une fraction rationnnelle dont le dénominateur ne peut s'annuler. Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculons la dérivée.

$$\begin{aligned}
g_3(x) &= \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 3} \\
g_3'(x) &= \frac{(2x+1)(x^2+3) - 2x(x^2+x+2)}{(x^2+3)^2} \\
&= \frac{2x^3 + 6x + x^2 + 1 - 2x^3 - 2x^2 - 4x}{(x^2+3)^2} \\
&= \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2+3)^2} \\
&= -\frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}
\end{aligned}$$

Le dénominateur est un carré donc toujours positif. Le numérateur un trinome du second degré positif entre ses racines -1 et 3. Nous en déduisons le tableau de variation.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$g_3'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g_3(x)$		$\searrow$	|	$\nearrow$	|	$\searrow$	

7) Soit la fonction définie par :

$$h_1 = 6x^2 - 24$$

h_1 est une fonction polynome, donc est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculons sa fonction dérivée.

$$h_1'(x) = 12x$$

L'étude de signe est immédiate, h_1 est du signe de x. On en déduit immédiatement le tableau de variation.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$h_1(x)$		$\searrow$	|	$\nearrow$	

8) Soit la fonction définie par :

$$h_2(x) = \sqrt{x} - \frac{x}{4} + 2$$

h_2 est définie sur $\mathbb{R}^+$ c'est-à-dire l'intervalle $[0, +\inf[$. Calculons la dérivée.

$$h_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4}$$

$$h_2'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4} \geq 0 \iff 2\sqrt{x} \leq 4 \iff x \leq 4$$

Nous en déduisons le tableau de variations.

x	0		4		$+\infty$
$h_2'(x)$		$+$	0	$-$	
$h_2(x)$		$\nearrow$	|	$\searrow$	