Exercice - M0268

1) On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

Pour cela, on introduit la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par =

$$v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

a) Etablir l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

b) En déduire le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), et prouver quelles sont adjacentes.

2) On note γ (**Constante d'Euler**) la limite commune des suites (u_n) et (v_n), et pour évaluer numériquement γ, on se propose d'utiliser la moyenne arithmétique m_n de u_n et v_n :

$$m_n = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Prouver que : $|m_n - \gamma| \leq \frac{1}{2n}$.

3) On souhaite améliorer cette majoration.

a) Montrer que

$$m_{k+1} - m_k = \int_k^{k+1} (t-k)(k+1-t)t^3 \mathrm{d}t$$

b) Etudier la fonction φ_k définie sur $[k; k+1]$ par :

$$\varphi_k(t) = (t-k)(k+1-t)$$

En déduire l'inégalité suivante :

$$0 \leq m_{k+1} - m_k \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{4t^3}$$

c) En déduire par sommation un encadrement de $m_{n+p} - m_n$, puis de $\gamma - m_n$.

d) Ecrire une fonction **Python** ou adaptée à votre calculatrice permettant d'obtenir une valeur approchée à $5 \cdot 10^{-p}$ près de γ, en exploitant la majoration précédente.
En déduire une valeur approchée de γ à $5 \cdot 10^{-5}$ près.