Exercice - M0268C

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement pour tout n par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \qquad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

1a) Montrons que

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

$$\forall t \in [n; n+1] \qquad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$$

Intégrons sur l'intervalle $[n; n+1]$. Il vient

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{n}$$

d'ou

$$\left[\frac{t}{n+1}\right]_n^{n+1} \leq [\ln t]_n^{n+1} \leq \left[\frac{t}{n}\right]_n^{n+1}$$

$$\frac{n+1-n}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{n+1-n}{n}$$

Conclusion :

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}}$$

1b) Déterminons le sens de variation des suites (u_n) et (v_n)

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \qquad = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n)$$

D'après l'inégalité établie précédement,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n \leq 0$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

Etudions de même les variations de (v_n).

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - \left(u_n - \frac{1}{n}\right) \\
&= u_{n+1} - u_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln n)
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité établie précédement,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} - v_n \geq 0$$

La suite (v_n) est croissante.

Enfin

$$u_n - v_n = \frac{1}{n} \implies \lim_{n\to\infty} u_n - v_n = 0$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjactentes. Elles sont donc convergentes et ont même limite. On appelera dans la suite γ leur limite commune.

2) On pose

$$m_n = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrons que $|m_n - \gamma| \leq \frac{1}{2^2}$. Nous avons :

$$\forall n \geq 1 \qquad v_n \leq \gamma \leq u_n$$

$$\begin{aligned}
-u_n \leq -\gamma \leq -v_n \\
\frac{u_n + v_n}{2} - u_n \leq m_n - \gamma \leq \frac{u_n + v_n}{2} - v_n \\
\frac{v_n - u_n}{2} - u_n \leq m_n - \gamma \leq \frac{u_n - v_n}{2}
\end{aligned}$$

et donc

$$-\frac{1}{2n} \leq m_n - \gamma \leq \frac{1}{2n}$$

Conclusion

$$\boxed{\forall n \geq 1 \qquad |m_n - \gamma| \leq \frac{1}{2n}}$$

3) On recherche une meilleure majoration.

3a) Montrons

$$m_{k+1} - m_k = \int_k^{k+1} \frac{(t-k)(k+1-t)}{t^3} \mathrm{d}t$$

Calculons l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_k^{k+1} \frac{(t-k)(k+1-t)}{t^3} \mathrm{d}t &= \int_k^{k+1} \frac{(k+1)t - t^2)k(k+1) + kt}{t^3} \mathrm{d}t \\
&= (2k+1) \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} - k(k+1) \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= (2k+1) \left[-\frac{1}{t}\right]_k^{k+1} - k(k+1) \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_k^{k+1} - [\ln t]_k^{k+1} \\
&= (2k+1) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{k(k+1)}{2} \left(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2}\right) - \ln(k+1) + \ln(k) \\
&= \frac{4k + 2 + k^2 - k^2 - 2k - 1}{2k(k+1)} - \ln(k+1) + \ln(k) \\
&= \frac{2k+1}{2k(kk+1)} - \ln(k+1) + \ln(k) \\
&= \frac{k+k+1}{2k(kk+1)} - \ln(k+1) + \ln(k) \\
&= \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2k} - \ln(k+1) + \ln(k)
\end{aligned}$$

Finalement

$$\int_k^{k+1} \frac{(t-k)(k+1-t)}{t^3} \mathrm{d}t = \frac{1}{2(k+1)} - \ln(k+1)$$

Calculons par ailleurs $m_{k+1} - m_k$. Remarquons que

$$m_n = \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{u_n + u_n - \dfrac{1}{n}}{2} = u_n - \frac{1}{2n}$$

Donc

$$\begin{aligned}
m_{k+1}-m_k &= u_{k+1}-\frac{1}{2(k+1)}-\left(u_k-\frac{1}{2k}\right)\\
&= u_{k+1}-u_k-\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2k}\\
&= -\ln(k+1)+\ln(k)+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2k}\\
&= \frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2k}-\ln(k+1)+\ln(k)
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{m_{k+1}-m_k=\int_k^{k+1}\frac{(t-k)(k+1-t)}{t^3}\mathrm{d}t}$$

3b) Etudions la fonction φ_k définie sur $[k;k+1]$ par $\varphi_k(t)=(t-k)(k+1-t)$. Dérivons

$$\varphi_k'(t)=(k+1-t)+(t-k)(-1)=k+1-t-t+k=2k+1-2t$$

D'ou

$$\varphi_k'(t)=(2k+1)-2t$$

$$\varphi_k'(t)\geq 0 \iff t\leq\frac{2k+1}{2}$$

La fonction présente donc un maximum en $\dfrac{2k+1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\varphi_k(k)&=(k-k)(k+1-k)=0\\
\varphi_k(k+1)&=(k+1-k)(k+1-(k+1))=0\\
\varphi_k\left(\frac{2k+1}{2}\right)&=\left(\frac{2k+1}{2}-k\right)\left(k+1-\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

D'ou le tableau de variation

t	k		$\frac{2k+1}{2}$		$k+1$
$\varphi_k'(t)$		$+$	0	$-$	
$\varphi_k(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Nous en déduisons successivement

$$\forall t\in[k;k+1]\qquad 0\leq\varphi_k(t)\leq\frac{1}{4}$$

puis

$$0\leq\frac{(t-k)(k+1-t}{t^3}\leq\frac{1}{4t^3}$$

Et enfin

$$0\leq\int_k^{k+1}\frac{(t-k)(k+1-t)}{t^3}\mathrm{d}t\leq\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{4t^3}$$

Conclusion

$$\boxed{0\leq m_{k+1}-m_k\leq\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{4t^3}}$$

3c) Nous pouvons écrire

$$m_{n+p}-m_n=(m_{n+p}-m_{n+p-1}+m_{n+p-1}-m_{n+p-2}+\cdot+m_{n+1}-m_n$$

et donc en utilisant la question précédente

$$\begin{aligned}
m_{n+p} - m_n &= \sum_{k=0}^{p-1} (m_{n+k+1} - m_{n+k} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{\mathrm{d}t}{4t^3} \\
&= \frac{1}{4} \int_n^{n+p} \frac{\mathrm{d}t}{t^4}
\end{aligned}$$

Il vient

$$0 \leq m_{n+p} - m_n \leq \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_n^{n+p}$$

Conclusion

$$\boxed{0 \leq m_{n+p} - m_n \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+p)^2} \right)}$$

En faisant tendre p vers l'infini, nous obtenons

$$0 \leq \gamma - m_n \leq \frac{1}{8n^2} \qquad m_n \leq \gamma \leq m_n + \frac{1}{8n^2}$$

3c) Ecrivons un algorithme Python permettant le calcul d'une valeur approchée

$$\begin{aligned}
&from\ math\ import\ log \\
&s = 0 \\
&for\ k\ in\ range(1, 51) : \\
&\qquad s = s + \frac{1}{k} \\
&return\ s - \log(n) - \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

L'algorithme retourne la valeur de m_n pour $n = 5$ ce qui correspond à la précision souhaitée.

$$|m_{50} - \gamma| \leq \frac{1}{8 \times 50^2} = 5 \times 10^{-5}$$

Voir également les exemples dans le cours d'Algorithmie.