**Exercice - M0269C**

**1)** Calculons la limite de la suite définie par :

$$u_n = \frac{\sqrt[5]{32n^5-1}-2n}{\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)\left(\cos\frac{1}{3n}-1\right)}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\sqrt[5]{32n^5-1}-2n}{\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)\left(\cos\frac{1}{3n}-1\right)} \\ &= \frac{2n\left(\sqrt[5]{1-\frac{1}{32n^5}}-1\right)}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-1\right)\left(\cos\frac{1}{3n}-1\right)} \\ &= \end{aligned}$$

On en déduit

$$u_n \sim \frac{2n\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{32n^5}\right)}{n^2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^4}\right)\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3n}\right)^2\right)}$$

d'ou

$$u_n \sim \frac{\frac{1}{5\times 2^5}\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{2\times 2^2\times 3^3}\frac{1}{4^2}} \sim \frac{9\times 2^3}{2^5\times 5}$$

Conclusion :

$$u_n \sim \frac{9}{20} \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{9}{20}$$

**2)** Calculons la limite de la suite définie par :

$$u_n = \frac{n^{10}-n!+2^n}{3n^n+n^2\ln n}$$

Nous avons

$$n^10 << 2^n << n! \qquad n^2\ln n = o(n^n)$$

Donc

$$u_n \sim -\frac{n!}{3n^n}$$

Or

$$n! = o(n^n)$$

Conclusion :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

**3)** Calculons la limite de la suite définie par :

$$u_n = \left(e^{\frac{1}{2n^3}} - \cos\frac{3}{n}\right)\left(2n^2+7n+5\right)$$

Nous avons

$$e^{\frac{1}{2n^3}} - \cos\frac{3}{n} = \left(e^{\frac{1}{2n^3}} - 1\right) + \left(1 - \cos\frac{3}{n}\right)$$

Recherchons des équivalents

$$\frac{1}{2n^3} - 1 \sim \frac{1}{2n^3}$$

$$1 - \cos\frac{3}{n} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}\right)^2 \implies 1 - \cos\frac{3}{n} \sim \frac{9}{2n^2}$$

Or

$$\frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc

$$e^{\frac{1}{2n^3}} - \cos\frac{3}{n} \sim \frac{9}{2n^2}$$

Enfin

$$2n^2 + 7n + 5 = 2n^2\left(1 + \frac{7}{2n} + \frac{5}{2n^2}\right)$$

Donc

$$2n^2 + 7n + 5 \sim 2n^2$$

Nous en déduisons

$$u_n \sim \frac{9}{2n^2}2n^2$$

Conclusion

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 9$$

**4)** Calculons la limite de la suite définie par :

$$u_n = \left(\frac{n^3+3n+2}{n^3+n+1}\right)^{n^2}$$

Nous avons

$$u_n = \left(\frac{n^3+3n+2}{n^3+n+1}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(\frac{n^3+3n+2}{n^3+n+1}\right)}$$

Recherchons des équivalents

$$\frac{n^3+3n+2}{n^3+n+1} \sim \frac{n^3}{n^3} = 1$$

Or

$$\frac{n^3+3n+2}{n^3+n+1} - 1 = \frac{n^3+3n+2-(n^3+n+1)}{n^3+n+1} = \frac{2n+1}{n^3+n+1}$$

D'ou

$$\ln\frac{n^3+3n+2}{n^3+n+1} \sim \frac{2}{n^2}$$

Et finalement

$$u_n \sim n^2\frac{2}{n^2}$$

Conclusion :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 2$$