Exercice - M0277C

a) Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3}(3x^2-2x)\ \mathrm{d}x$

$$\int_{-1}^{3}(3x^2-2x)\ \mathrm{d}x=\left[x^3-x^2\right]_{-1}^{3}=3^3-3^2-((-1)^3-(-1)^2)=27-9+1+1=20$$

Conclusion

$$\boxed{\int_{-1}^{3}(3x^2-2x)\ \mathrm{d}x=20}$$

b) Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2+3}\ \mathrm{d}x$. C'est bien sur de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

$$\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2+3}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{2x}{x^2+3}\ \mathrm{d}x=\left[\frac{\ln(x^2+3)}{2}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}(\ln(4)-\ln(3))=\ln\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$$

Conclusion

$$\boxed{\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2+3}\ \mathrm{d}x=\ln\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)}$$

c) Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{2}xe^{x^2}\ \mathrm{d}x$. C'est de la forme $u'(x)e^{u(x)}$.

$$\int_{-1}^{2}xe^{x^2}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}2xe^{x^2}\ \mathrm{d}x=\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_{-1}^{2}=\frac{e^{2^2}-e^{(-1)^2}}{2}=\frac{e^4-e}{2}$$

Conclusion

$$\boxed{\int_{-1}^{2}xe^{x^2}\ \mathrm{d}x=\frac{e^4-e}{2}}$$

d) Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\ \mathrm{d}x$

$$\int_{-1}^{1}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\ \mathrm{d}x=\left[2\sqrt{x^2+1}\right]_{-1}^{1}=2\sqrt{1^2+1}-2\sqrt{1^1+2}=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$$

Bon évidement, si on est malin, on remarque que la fonction est impaire et que l'on intègre sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine, le résultat est donc 0.

Conclusion

$$\boxed{\int_{-1}^{1}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\ \mathrm{d}x=0}$$

e) Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(2x-1+\frac{1}{x+1}\right)\ \mathrm{d}x$

$$\int_{0}^{1}\left(2x-1+\frac{1}{x+1}\right)\ \mathrm{d}x=\left[x^2-x+\ln(x+1)\right]_{0}^{1}=1^2-1+\ln(1+1)-(0^2-0+\ln(0+1)=\ln 2$$

$$\boxed{\int_{0}^{1}\left(2x-1+\frac{1}{x+1}\right)\ \mathrm{d}x=\ln 2}$$