Exercice - M0290C

Calculons la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3\ cosx}$$

Le numérateur et le dénominateur prennent la valeur 0 en 0. Nous avons donc une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Il faut donc lever l'indétermination.

$$\frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3\ cosx} = \frac{\sin x(1 - \cos x}{x^3 \cos x}$$

Nous avons par ailleurs

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \implies 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3\ cosx} &= \frac{\sin(x) \times 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3 \cos x} \\
&= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\
&= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2
\end{aligned}$$

Sous cette forme, il n'y a plus d'indétermination. En effet, nous n'avons plus que des limites finies calculables ou des limites connues des fonctions trignonométrique, et notammement

$$\lim_{\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1^2 = 1$$

Conclusion :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3\ cosx} = \frac{1}{2}$$