Exercice - M0305C

Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$

1) f est définie pour toute valeur de x telle que $e^{2x} - e^x + 1 > 0$.

Méthode 1

Posons donc
$$h(x) = e^{2x} - e^x + 1$$

Etudions le signe de $h(x)$. Pour cela étudions les variations de la fonction h
$$h'(x) = 2e^{2x} - e^x = e^x(2e^x - 1$$

Donc
$$h'(x) \geq 0 \iff 2e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq \frac{1}{2} \iff x \geq \ln\frac{1}{2}$$

Nous en déduisons le signe deh' puis les variaitons de h
$$\begin{aligned} h\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= e^{2\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + 1 \\ &= \left(e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^2 - e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + 1 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

D'ou le tableau de variation de h.

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	
$h(x)$			$+$		

Donc h est toujours stricement positive et donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2

Posons $P(x) = x^2 - x + 1$. Nous avons alors
$$f(x) = \ln(P(e^x))$$

Or $P(x)$ est un trinome de signe constant qui ne prend pas la valeur 0. En effet son discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$. Donc
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(e^2 > 0$$

Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2a) Etudions les variations de f
$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

Finalement
$$f'(x) = e^x(2e^x - 1)e^{2x} - e^x + 1$$

f' est du signe de $2e^x - 1$.

$$2e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq \frac{1}{2} \iff x \geq \ln\frac{1}{2}$$

Autrement dit :

- f est croissante sur $\left[\ln\frac{1}{2}; +\infty\right[$
- f est dćroissante sur $\left]-\infty; \ln\frac{1}{2}\right]$

La fonction présnte donc un minimum.

2b) Dressons le tableau de variation de f. Pour cela calculons les limites aux bornes du domaine.

En $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x + 1 = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right) = +\infty$$

Car

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$$

Par composition

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^{2x} - e^x + 1)\right) = +\infty \implies \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

En $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0 \implies \lim_{x\to\infty} e^{2x} - e^x + 1 = 1$$

Par composition

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right) = 0$$

Conclusion

$$\lim_{n\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Nous en déduisons le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\ln\frac{3}{4}$	$\nearrow$	

3) La fonction f présente un minimum en $x = \ln\frac{1}{2}$ qui est $\ln\frac{3}{4}$. Autrement, le point correspondant sur la courbe a pour coordonnées

$$A\left(\ln\frac{1}{2}; \ln\frac{3}{4}\right)$$

Soit numériquement $(-0,69; -0,29)$

4 Etudions la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ. Etudions donc le signe de $f(x) - 2x$.

$$\begin{aligned} f(x) - 2x &= \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right) - 2x \\ &= \ln\left(e^{2x}\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)\right) - 2x \\ &= 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right) - 2x \\ &= \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right) \end{aligned}$$

Donc

$$f(x - 2x \geq 0 \iff \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right) \geq 0 \iff 1 - e^{-x} + e^{-2x} \geq 1$$

L'inéquation se résout immédiatement

$$1 - e^{-x} + e^{-2x} \geq 1 \iff e^{-2x} \geq e^{-x} \iff -2x \geq -x \iff x \leq 0$$

Conclusion :

– Pour $x \leq 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de Δ

– Pour $x > 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est au dessous de Δ

De plus,

$$f(x) - 2x = \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right) \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0$$

La droite Δ est donc une asymptote oblique de la courbe $\mathcal{C}$.