Exercice - M0307C

1 f_1 est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f_1(x) = 2x - 2 + \ln(x^2+1)$$

Etudions les variations de f_1.

$$f_1'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2+2x}{x^2+1} = \frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}$$

Calculons le discriminant du trinome $Q(x) = x^2+x+1$.

$$\Delta = 1^2 - 4\times 1\times 1 = -3$$

$Q(x)$ est donc de signe constant positif. Quant à 2 et x^2+1, ce sont manifestement des facteurs positifs. Nous en déduisons

$$\forall x \in [0;+\infty[\qquad f_1'(x) > 0$$

La fonction f_1 est donc strictement croissante sur son domaine de éfinition.

Calculons les limites (qui ne posent aucun problème. En 0, la limite est simplement l'image de 0 la fonction étant continue et donc

$$\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = -2$$

En $+\infty$, x^2 tend vers ∞ et par composition il en des demême pour $\ln(x^2+1$, donc

$$\lim_{x\to +\infty} f_1(x) = +\infty$$

Nous en déduisons le tableau de variation de f_1.

x	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	

2) n est un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}$$

2a) Montrons que la fonction f_n est strictement croissante. Calculons sa dérivée

$$f_n'(x) = 2 + \frac{2x}{n(x^2+1)} = \frac{2(nx^2+2x+n)}{n(x^2+1)}$$

Considérons le polynome $Q_n(x) = nx^2+x+n$. Son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4n^2$, il est manifestement négatif. Quelque soit la valeur de n le polynome $Q_n(x)$ est strictement positif. Nous en déduisons que $f_n'(x)$ est toujours strictement positive sur l'intervalle $[0;+\infty$ et donc que la fonction $f_n(x)$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Conclusion : pour tout entier naturel strictement positif, la fonction f_n est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2b) Montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $[0;+\infty[$.

- La fonction $f_n(x)$ est continue car dérivable sur $[0;+\infty[$
- La fonction $f_n(x)$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$
- $f(0) = 2\times 0 - 2 + \dfrac{1}{n}\ln(0^2+1) = -2 + \dfrac{1}{n}\ln(1) = -2$

- $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$
- $0 \in [-2; +\infty[$

D'après le corrolaire du théorème des valeurs intermédiares, il existe une une unique valeur α_n telle que $f_n(\alpha_n) = 0$.

Conclusion : l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; +\infty'$.

2c) Nous pouvons resseré l'intervalle dans lequel se trouve la racine α_n de l'équation. En effet,

$$f_n(1) = 2 \times 1 - 2 + \frac{\ln(1^2 + 1}{n} = \frac{\ln 2}{n} > 0$$

La solution est donc bien entre 0 et et 1.

Conclusion : L'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$ est α_n et nous avons $0 < \alpha_n < 1$ pour tout valeur de $n \in \mathbb{N}^\star$.

3) Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$. Nous avons,

$$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 \implies 2\alpha_{n+1} - 2 + \frac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n+1} = 0 \implies 2\alpha_{n+1} - 2 = -\frac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n+1} \qquad (\star)$$

donc

$$f_n(\alpha_{n+1} = 2\alpha_{n+1} - 2 + \frac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1}{n}$$

En utilisant l'égalité $\star$, il vient.

$$f_n(\alpha_{n+1}) = -\frac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1}{n+1} + \frac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1}{n} = \ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Or

$$1 + \alpha_{n+1}^1 > 1 \implies \ln(\alpha_{n+1}^1 + 1) > 0$$

et

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}^\star$ $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$

4) Etudions la suite (α_n).

4a) Montrons que la suite (α_n) est croissante. C'est immédiate. Nous avons

$$f_n(\alpha_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_n(\alpha_{n+1}) > 0$$

La fonction f_n étant strictement croissante nous devons avoir $\alpha_{n+1} > \alpha_n$. En effet, supposons

$$\alpha_{n+1} < \alpha_n \implies f_n(\alpha_{n+1} < f_n(\alpha_n) \implies f_n(\alpha_{n+1} < 0$$

Ce qui est en contradiction avec ce que nous avons montré à la question précédente. Donc $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, ce qui démontre que la suite (α_n) est croissante.

Conclusion : la suite (α_n) est croissante.

4b) Montrons que la suite (α_n) est convergnte. La encore c'est immédiat. Elle est croissante et elle est majorée par 1. Or toute suite croissante majorée convergen, donc la suite (α_n) converge.

Conclusion : La suite (α_n) est convergente

4c) Déterminons la limite de la suite (α_n). Nous avons établit la convergence de la suite, la limite existe donc et est finie. Soit ℓ la limite. Par définition de la suite nous avons

$$f_n(\alpha_n) = 0 \implies 2\alpha_n - 2 + \frac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{n} = 0 \implies \alpha_n = 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2 + 1}{2n}$$

Passons à la limite dans cette dernière expression

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{2n} = 1$$

Car

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\alpha_n^1 + 1) = \ln(\ell^2 + 1)$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{2n} = 0$$

Conclusion

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$$