Exercice - M0310C

G est un ensemble fini muni d'une loi de composition interne, que nous noterons multiplicativement tel que tout élément soit régulier. Afin de montrer que G est un groupe, nous devons montrer

- Qu'il existe un élément neutre.
- Que tout élément et symétrisable.

Soit a un élément de G. Considérons les applications :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a : & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longrightarrow & ax \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \psi_a : & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longrightarrow & xa \end{array}$$

a est un élément régulier à gauche,

$$\forall (x,y) \in G^2 \qquad \varphi_a(x) = \varphi_a(y) \implies ax = ay \implies x = y$$

Autrement dit φ_a est injective. Or G est un ensemble fini, donc φ_a est bijective. Un raisonement tout à fait analogue permet de conclure que ψ_a est également bijective, a étant régulier à droite cette fois. Nous en déduisons l'existence d'un antécédent e_a de a par φ_a et e'_a de par ψ_a.

$$\exists e_a \in G \quad \varphi_a(e_a) = a \qquad \exists e'_a \in G \quad \psi_a(e'_a) = a$$

Ce qui s'ecrit

$$ae_a = a \qquad \text{et} \qquad e'_a a = a$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} ae_a & = a \\ e'_a & = a \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{ll} (ae_a)e'_a & = ae'_a \\ e_a(e'_a a) & = e_a a \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{ll} a(e_a e'_a) & = ae'_a \\ (e_a e'_a)a & = e_a a \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{ll} e_a e'_a & = e'_a \\ e_a e'_a & = e_a \end{array} \right.$$

Nous en déduisons $e_a = e'_a$. Donc

$$\forall a \in G \qquad existse_a \qquad ae_a = e_a a = a$$

Soit $b \in G$ un autre élément de G. Il existe e_b tel que $be_b = e_b b = b$. Nous avons donc

$$\left\{ \begin{array}{lll} ae_a = & e_a a & = a \\ be_b = & e_b b & = b \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{lll} ae_a b = & e_a ab & = ab \\ abe_b = & ae_b b & = ab \end{array} \right. \implies ae_a b = ae_b b \implies e_a = e_b$$

Nous en déduisons donc l'existenc d'un élément neutre $e = e_a = e_b$

$$\forall a \in G \qquad \exists e \in G \qquad ae = ea = a$$

Il reste à montrer que tout élément est symétrisable. Soit donc $a \in G$. e a un antécédent par φ_a noté a' et un antécédent par ψ_a noté a''. Ce qui s'écrit

$$\varphi_a(a') = e \qquad \psi_a(a'') = e$$

Ou encore

$$aa' = a''a = e$$

Et donc, compte-tenu de l'associativité et de la régularité de a à droite et à gauche.

$$aa'a = a \qquad \text{et} \qquad aa''a = a \implies aa'a = aa''a \implies a' = a''$$

Autrement dit a a un symétrique $a^{-1} = a' = a''$.

Conclusion : G est un ensemble fini

- muni d'une loi de composition interne
- cette loi est associative
- il existe un élément neutre
- tout élément a un symétrique

G est un groupe.