Exercice - M0316

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \ \mathrm{d}t$

(a) Déterminer une relation simple entre I_{n+2} et I_n

(b) Préciser I_0 et I_1 et en déduire une expression de I_n à l'aide de factorielle et de puissances.

(c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(n+1)I_nI_{n+1}$ est stationnaire.

(d) En déduire la formule de Wallis :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!\sqrt{2p}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad u_n = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$$

(a) Montrer que la série de terme général u_n converge

(b) En déduire que la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers un réel ℓ qui est strictement positif. Déterminer ℓ.

(c) En déduire la formule de Stirling :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

3. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$