Exercice - M0322C

Calculons la somme suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Nous avons l'égalité

$$\int_0^1 t^k \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$$

Posons

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)k \int_0^1 t^{k-1} \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \int_0^1 t^k \, \mathrm{d}t \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (-t)^k \, \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k\right) \, \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} \, \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t)} \, \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{1+t)} \, \mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t)} \, \mathrm{d}t \\
&= -[\ln(1+t)]_0^1 + \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t)} \, \mathrm{d}t \\
&= -(\ln 2 - \ln 1 + \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t)} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$S_n = -\ln 2 + \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t)} \, \mathrm{d}t$$

Poson

$$I_n = \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t)} \, \mathrm{d}t$$

Or $\forall t \in [0,1]$ nous avons

$$\begin{aligned}
1+t &\geq 1 \\
0 \leq \frac{1}{1+t} &\leq t^n \\
0 \leq \frac{t^n}{1+t} &\leq t^n \\
0 \leq I_n &\leq \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t \\
0 \leq I_n &\leq \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Le théorème des gendarmes nous donne immédiatement

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$$

Revenons à S_n

$$S_n = -\ln 2 + In$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty} S_n = -\ln 2 + \lim_{n\to\infty} I_n$$

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2}$$