Exercice - M0323C

Montrons qu'une matrice 2x2 à coefficients réels est semblable à sa transposée. Soit A une matrice 2x2 et ${}^tA$ sa transposée

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Si A est diagonale, elle est égale à sa transposée. Les deux matrices sont trivialement semblables. On se place donc pour la suite dans le cas ou A n'est pas diagoanale, ce qui impose que l'un des coefficient b ou c est non nul.

Si A et ${}^tA$ sont semblables, il existe une matrice inversible P telle que

$${}^tA = P^{-1}AP \iff P{}^tA = AP$$

Posons

$$P = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$$

Il vient

$$\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cz & bx+dz \\ ay+cz & by+dz \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy & az+ct \\ bx/dy & bz+dt \end{pmatrix}$$

Dou

$$\begin{cases} ax+cz = ax+cy \\ ay+cz = bx+dy \\ bx+dy = az+ct \\ by+dz = bz+dt \end{cases} \iff \begin{cases} c(y-z) = 0 \\ bx+(d-a)y-ct = 0 \\ bx+(d-a)z-ct = 0 \\ b(y-z) = 0 \end{cases}$$

Nous avons $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, donc $y = z$. Le système se ramène donc à

$$\begin{cases} y = z \\ bx+(d-a)z-ct = 0 \end{cases}$$

Si $c \neq 0$, il suffit de prendre

$$x = 0 \qquad y = c \qquad z = c \qquad t = d-a$$

Sinon

$$t = 0 \qquad y = -b \qquad z = -b \qquad x = d-a$$

Ainsi

$$P = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d-a \end{pmatrix} \qquad ou \qquad P = \begin{pmatrix} d-a & -b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

Les déterminents sont respectivement c^2 et b^2, l'un au moins est non nul et donc l'une des deux matrices est inversible.

Conclusion