Exercice - M0325C

1) Montrons que $x \in \mathcal{C}^1(I,E)$ est solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}$: $\left\{ \begin{array}{l} x' = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = \alpha \end{array} \right.$ si et seulement si x est solution de l'équation intégrale

$$(\mathcal{P}') \ : \qquad \forall t \in I, \quad x(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t} [a(u)\,(x(u)) + b(u)] \ \mathrm{d}u$$

Si x est solution de $\mathcal{P}$, x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I donc x est continue. On a alors

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} x'(u) \ \mathrm{d}u$$

Autrement dit, compte tenu de $x(t_0) = \alpha$

$$x(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t} (a(u)(x(u)) + b(u)) \ \mathrm{d}u$$

x est donc solution de $\mathcal{P}'$.

Réciproquement, si x est continue sur I alors la fonction $u \longrightarrow a(u)(x(u)) + b(u)$ est continue et d'après le théorème fondamental de l'intégration la fontion définie par

$$x(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t} (a(u)(x(u)) + b(u)) \ \mathrm{d}u$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivé est $x'(t) = a(t)(x(t) + b(t)$ quelque soit $t \in I$. De plus, par construction $x(t_0) = \alpha$. x est donc solution du problème de Cauchy P.

Conclusion : x solution de $\mathcal{P}$ équivaut à x solution de $\mathcal{P}'$

2) On pose $z_0(t) = \alpha$ pour tout t de I et, pour tout (t,n) de $I \times \mathbb{N}$

$$z_{n+1}(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t} [a(u)\,(z_n(u)) + b(u)] \ \mathrm{d}u$$

Raisonnons par réccurence. La fonction $z_0(t) = \alpha$ est contante donc continue. Donc $z_0 \in \mathcal{C}^0(I,E)$. Supposons que $z_n \in \mathcal{C}^0(I,E)$. Alors z_{n+1} est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, elle donc continue et donc $z_{n+1} \in \mathcal{C}^0(I,E)$.

Conclusion : on définit bien une suite de fonction continue de I dans E.

3) On considère la série de fonction de terme général $y_n = z_{n+1} - z_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et J un segment inclus dans I contenant t_0

a) Montrons l'existence d'un couple $(M,k) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que

$$\forall u \in J \qquad \|a(u) \leq M \qquad \text{et} \qquad N(y_0(u)) \leq k$$

L'application $y_0 = z_1 - z_0$ est continu sur l'intervalle fermé borné J, d'après le théorème des bornes (ou théorème de Weierstrass y_0 est bornée et atteint sa borne. Donc il existe k réel positif tel que

$$\forall u \in J \qquad N(y_0(u)) \leq k$$

De même l'application a est continue sur J elle est donc également bornée. Par conséquent il existe un réel positif M tel que

$$\forall u \in J \qquad \|a(u)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M$$

b) Montrons par réccurence sur n que pour tout t de J et tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$N(y_n(t)) \leq k\frac{M^n|t-t_0|^n}{n!}$$

Pour $n = 0$, la propriété est trivialement vérifiée, en effet :

$$N(y_0(t)) \leq k \qquad \text{rm} \qquad k = k\frac{M^0|t-t_0|^0}{0!}$$

Supposons la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est également vraie au rang $n+1$

$$\begin{aligned}
y_{n+1}(t) &= z_{n+2}(t) - z_{n+1}(t) \\
&= \left(\alpha + \int_{t_0}^{t} (a(u)(z_{n+1}(u) + b(u))\ \mathrm{d}u\right) - \left(\alpha + \int_{t_0}^{t} (a(u)(z_n(u) + b(u))\ \mathrm{d}u\right) \\
&= \int_{t_0}^{t} a(u)(z_{n+1}(u) - z_n(u))\ \mathrm{d}u \\
&= \int_{t_0}^{t} a(u)(y_n(u))\ \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$N(y_{n+1}(t)) = N\left(\int_{t_0}^{t} a(u)(y_n(u))\ \mathrm{d}u\right) \leq \int_{t_0}^{t} N\left(a(u)(y_n(u))\right)\ \mathrm{d}u \leq \int$$

Or

$$N\left(a(u)(y_n(u))\right) \leq \|a(u)\| N(y_n(u)) \leq Mk\frac{M^n|t-t_0|^n}{n!}$$

En reportant dans l'intégrale, il vient

$$N\left(y_{n+1}(t)\right) \leq M\int_{t_0}^{t} k\frac{M^n|t-t_0|^n}{n!}\ \mathrm{d}u = M^{n+1}k\int_{t_0}^{t} \frac{|t-t_0|^n}{n!}\ \mathrm{d}u$$

Pour calculer l'intégrale, enlevons la valeur absolue en distiguant les cas $t < t_0$ et $t > t_0$.

Si $t > t_0$, on a

$$\left|\int_{t_0}^{t} \frac{|u-t_0|^n}{n!}\ \mathrm{d}u\right| = \int_{t_0}^{t} \frac{(u-t_0)^n}{n!} = \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Si $t < t_0$ on a

$$\left|\int_{t_0}^{t} \frac{|u-t_0|^n}{n!}\ \mathrm{d}u\right| = \int_{t_0}^{t} \frac{(t_0-u)^n}{n!} = \frac{(t_0-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

On a donc finalement, pour tout $t \in J$

$$N\left(y_{n+1}(t)\right) \leq k\frac{M^{n+1}|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Nous pouvons conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall t \in J \qquad N(y_n(t)) \leq k\frac{M^n|t-t_0|^n}{n!}$$

c) Appelons ℓ la longueur du segment J. Nous avons

$$\forall t \in J \qquad N\left(y_n(t)\right) \leq k\frac{(M\ell)^n}{n!}$$

Autrement dit y_n est borné sur J et

$$\|y_n\|_\infty \leq k\frac{(M\ell)^n}{n!}$$

La série de terme général $a_n = \frac{(M\ell)^n}{n!}$ est convertent (c'est l'esponetielle) donc la série de terme général y_n est normalement convergente. On en déduit immédiatement la convergence uniforme de la série de terme général y_n. Or

$$\sum_{k=0}^{n} y_k = z_{n+1} - z_0$$

donc

$$z_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k + z_0$$

On en déduit immédiatement la convergence uniforme de la suite de fonction $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur J.

Conclusion : La suite de fonction $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact inclu dans I et contenant t_0.

z est limite uniforme d'une suite de fonction continue, elle est donc continue. Pour tout n on a $z_n(t_0) = \alpha$ et donc $z(t_0) = \alpha$. Enfin, montrons que la suite de fonction définie par $t \longrightarrow a(t)(z_n(t)) + b(t)$ converge uniformément sur tout compact J inclu dans I et contenant t_0. Nous avons :

$$\begin{aligned} N\left(a(t)(z_n(t)) + b(t) - (a(t)(z(t)) + b(t))\right) &= N\left(a(t)(z_n(t) - z(t))\right) \\ &\leq \|a\| \cdot N(z_n(t) - z(t)) \\ &\leq M\|z_n - z\|_\infty \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc la convergence uniforme et nous pouvons écrire

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left(a(u)(z_n(u)) + b(u)\right)\ \mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} \left(a(u)(z(u)) + b(u)\right)\ \mathrm{d}u$$

En passant à la limite dans l'expression définissant par réccurence (z_n)

$$\lim_{n\to\infty} z_{n+1}(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left(a(u)(z_n(u)) + b(u)\right)\ \mathrm{d}u$$

nous obtentons

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} \left(a(u)(z_n(u)) + b(u)\right)\ \mathrm{d}u$$

Autrement dit z est solution de $\mathcal{P}'$ et donc solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}$.

Conclusion : nous avons prouvé l'existence de solution au problème de Cauchy $\mathcal{P}$: $\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = \alpha \end{cases}$

4) Montrons l'unicité de la solution. Soit x_1 et x_2 deux solutions du problème de Cauchy $\mathcal{P}$. Les solutions vérifient $\mathcal{P}'$ donc

$$x_1 = \alpha + \int_{t_0}^{t} (a(u)(x_1(u) + b(u))\ \mathrm{d}u \qquad x_2 = \alpha + \int_{t_0}^{t} (a(u)(x_2(u) + b(u))\ \mathrm{d}u$$

d'ou

$$x_2 - x_1 = \int_{t_0}^{t} a(u)(x_2(u) - x_1(u))\ \mathrm{d}u$$

En norme, nous obtenons pour tout $t \in J$, ou J est un intervalle fermé inclus dans I et contenant t_0

$$N(x_2(t) - x_1(t)) = N\left(\int_{t_0}^{t} a(u)(x_2(u) - x_1(u))\ \mathrm{d}u\right) \leq \int_{t_0}^{t} N(a(u)(x_2(u) - x_1(u))\ \mathrm{d}u$$

et donc par une réccurence similaire à celle de la question 3b), nous obtenons

$$\forall t \in J \qquad N(x_2(t) - x_1(t)) \leq \int_{t_0}^{t} k\frac{M^n|t - t_0|^n}{n!}\ \mathrm{d}u$$

En désignant par ℓ la longueur de l'intervalle J, nous obtenons pour tout $t \in J$ et pour tout n entier naturel,

$$\|x_2 - x_1\|_\infty \leq k'\frac{(M\ell)^n}{n!}$$

Or $\dfrac{(M\ell)^n}{n!}$ est le terme général de la série convergent vers $e^{M\ell}$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(M\ell)^n}{n!} = 0$, on en déduit

$$\forall J \subset I \qquad t_0 \in J \qquad \|x_2 - x_1\|_{J,\infty} = 0$$

et finalement

$$\|x_2 - x_1\|_\infty = 0$$

Autrement dit $x_2 - x_1 = 0$ et donc $x_1 = x_2$.

Conclusion : la solution du problème de Cauchy est unique.