Exercice - M0334C

L'aire des lunules $\mathcal{A}$ est égale à la somme des aires des demis cercles de diamètre $[AC]$ et $[BC]$ auquel on retranche l'aire $\mathcal{B}$ du demi cercle de diamètre $[AB]$ qui n'est pas dans le triangle ABC. Nous avons donc

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \mathcal{T}$$

ou $\mathcal{T}$ désigne l'aire du triangle ABC

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2 - \mathcal{B}$$

En remplaçant $\mathcal{B}$ par son expression, il vient :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \mathcal{T}\right)$$

Soit encore

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{8}\left(AC^2 + BC^2 - AB^2\right) + \mathcal{T}$$

Or le triangle ABC est rectangle en C donc d'après le théorème de Pythagore

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

et donc

$$AC^2 + BC^2 - AB^2 = 0$$

d'ou

$$\mathcal{A} = \mathcal{T}$$

L'aire des lunules est bien égale à l'aire du triangle !