Exercice - M0340C

1) Montrons que
$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(b_n)-F(a_n)}{b_n-a_n}=F'(x)$$
et pour cela calculons la limite lorque n tend vers $+\infty$ de

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \left|\frac{F(b_n)-F(a_n)}{b_n-a_n}-F'(x)\right| \\
&= \left|\frac{F(b_n)-F(a_n)-F'(x)(b_n-a_n)}{b_n-a_n}\right| \\
&= \left|\frac{F(b_n)-F(x)+F(x)-F(a_n)-F'(x)(b_n-x+x-a_n)}{b_n-a_n}\right| \\
&= \left|\frac{F(b_n)-F(x)-F'(x)(b_n-x)+F(x)-F(a_n)-F'(x)(x-a_n)}{b_n-a_n}\right| \\
&= \left|\frac{F(b_n)-F(x)-F'(x)(b_n-x)}{b_n-a_n}+\frac{F(x)-F(a_n)-F'(x)(x-a_n)}{b_n-a_n}\right| \\
&= \left|\frac{F(b_n)-F(x)-F'(x)(b_n-x)}{b_n-x}\cdot\frac{b_n-x}{b_n-a_n}+\frac{F(x)-F(a_n)-F'(x)(x-a_n)}{x-a_n}\cdot\frac{x-a_n}{b_n-a_n}\right| \\
&\leq \left|\frac{F(b_n)-F(x)-F'(x)(b_n-x)}{b_n-x}\right|\cdot\left|\frac{b_n-x}{b_n-a_n}\right|+\left|\frac{F(x)-F(a_n)-F'(x)(x-a_n)}{x-a_n}\right|\cdot\left|\frac{x-a_n}{b_n-a_n}\right| \\
&\leq \left|\frac{F(b_n)-F(x)}{b_n-x}-F'(x)\right|\cdot\left|\frac{b_n-x}{b_n-a_n}\right|+\left|\frac{F(a_n)-F(x)}{a_n-x}-F'(x)\right|\cdot\left|\frac{x-a_n}{b_n-a_n}\right|
\end{aligned}$$

Or
$$b_n>x>a_n \implies b_n-x<b_n-a_n \quad \text{et} \quad b_n>x>a_n \implies b_n-a_n>x-a_n$$
donc
$$0\leq\left|\frac{b_n-x}{b_n-a_n}\right|\leq 1 \qquad \text{et} \qquad 0\leq\left|\frac{x-a_n}{b_n-a_n}\right|\leq 1$$
La dérivabilité de F nous donne
$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(b_n)-F(x)}{b_n-x}=F'(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{F(a_n)-F(x)}{a_n-x}=F'(x)$$
et donc
$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(b_n)-F(x)}{b_n-x}-F'(x)=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{F(a_n)-F(x)}{a_n-x}-F'(x)=0$$
On en déduit immédiatement
$$0\leq G_n(x)\leq\left|\frac{F(b_n)-F(x)}{b_n-x}-F'(x)\right|+\left|\frac{F(a_n)-F(x)}{a_n-x}-F'(x)\right|$$
et
$$\lim_{n\to\infty}G_n(x)=0$$
Conclusion
$$F \text{ derivable} \qquad \implies \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{F(b_n)-F(a_n)}{b_n-a_n}=F'(x)$$
2) Nous avons par définition de g
$$g(x)=\min(x-E(x),E(x)+1-x) \qquad g(x+1)=\min(x+1-E(x+1),E(x)+1-(x+1))$$
Or
$$E(x+1)=E(x)+1$$

Donc

$$\begin{aligned}
g(x+1) &= \min(x+1-E(x+1), E(x+1)+1-(x+1)) \\
&= \min(x+1-E(x)-1, E(x)+1+1-x-1) \\
&= \min(x-E(x); E(x)+1-x) \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

La fonction est g est 1-périodique.

La périodicité étant acquise, nous pouvons limiter le domaine d'étude et étudier g sur l'intervalle $[0,1[$.

$$\forall x \in [0,1[\qquad E(x) = 0$$

Et donc

$$\begin{cases} g(x) = x & 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ g(x) = 1-x & \dfrac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

Il s'agit d'une fonction affine par morceau donc continue sur les intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$. Nous avons :

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} g(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} g(x) = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} g(x) = g\left(\frac{1}{2}\right)$$

La fonction g est donc continue sur l'intervalle $[0,1[$

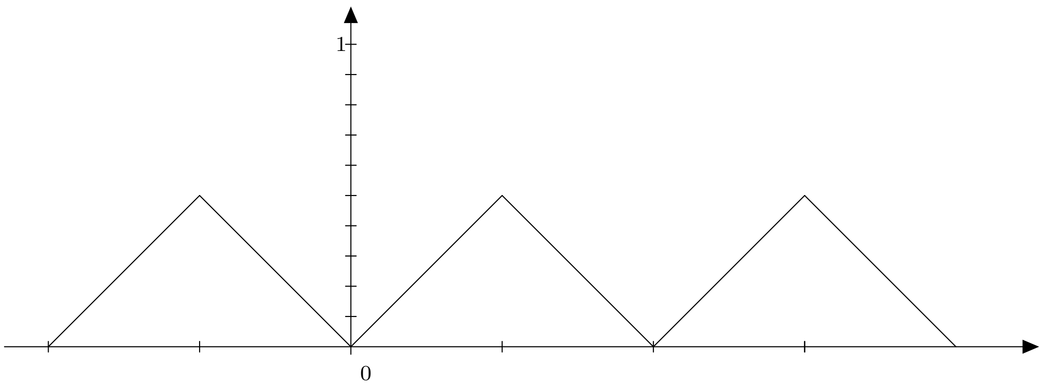

FIGURE 1 – Representation de g

3 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(10^k x)}{10^k}$$

Montrons que l'on définit ainsi une fonction f 1-périodique et continue. Introduisons la suite de fonctions f_n des sommes partielles.

$$f_n(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{g(10^k x)}{10^k}$$

Pour x fixé, on obtient une série numérique à terme positif, dont le terme général est majoré par une suite géométrique. En effet

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad g(10^k x) \leq \frac{1}{2}$$

Et donc, le terme général est majoré

$$\frac{g(10^k x)}{10^k} \leq \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

Nous en déduisons la convergence simple vers une fonction

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(10^k x)}{10^k}$$

Montrons que f est 1-périodique.

$$f(x+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(10^k(x+1))}{10^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(10^k x + 10^k)}{10^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(10^k x)}{10^k} = f(x)$$

Il reste à établir la continuité. Les fonctions f_n sont continues comme somme de fonctions continues.

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{g(10^k x)}{10^k} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{10^n} \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{10^n} = 0$$

Donc, on peut majoré $|f_n(x) - f(x)|$ indépendamnnet de x. On

$$\forall \epsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

La suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers f. Les fonctions f_n étant continues, f est confinue.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, 1-périodique et continue.

4) Soit x de $[0, 1[$ de développement décimal propre $x = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x_p}{10^p}$, c'est-à-dire que la suite $(x_p)_{p \geq 1}$ est à valeur dans $[\![0, 9]\!]$ et telle que pour tout q de $\mathbb{N}^\star$ il existe un $p \geq q$ tel que $x_p \neq 9$. Pour tout n de $\mathbb{N}^\star$ on pose $a_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{10^p}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$

a) Calculons $g(10^k a_n)$ et $g(10^k b_n)$ pour tout $k \geq n$.

$$g(10^k a_n) = g\left(10^k \sum_{p=1}^{n} \frac{x_p}{10^p}\right) = g\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{x_p}{10^{p-k}}\right) = g\left(\sum_{p=1}^{n} 10^{k-p} x_p\right)$$

Avec $k \geq n$, tous les termes $10^{k-p} x_p$ sont des entiers naturels et donc $10^k a_n \in \mathbb{N}$. On en déduit d'après la question 2) que $g(10^k a_n) = 0$. On démontrer de même que $10^k b_n \in \mathbb{N}$ et donc que $g(10^k b_n) = 0$ pour tout $k \geq n$.

Conclusion

$$\forall k \geq n \qquad g(10^k a_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(10^k b_n) = 0$$

b) On suppose maintenant que $k < n$ et on pose $r = 10^k \sum_{p=1}^{k} \frac{x^p}{10^p}$

i) Montrons que r est un entier naturel. Comm préceédement

$$r = 10^k \sum_{p=1}^{k} \frac{x^p}{10^p} = \sum_{p=1}^{k} x_p 10^{k-p}$$

Or $p \leq k$ donc $k - p \geq 0$ et donc les termes $10^{k-p}x_p$ sont des entiers de même que leur somme. Nous avons donc bien $r \in \mathbb{N}$.

Démontrons maintenant l'inégalité $10^k a_n \geq r + \dfrac{x_{k+1}}{10}$

$$10^k a_n = 10^k \sum_{p=1}^{n} \frac{x_p}{10^p} = 10^k \sum_{p=1}^{k} \frac{x_p}{10^p} + 10^k \sum_{p=k+11}^{n} \frac{x_p}{10^p} = r + 10^k \sum_{p=k+11}^{n} \frac{x_p}{10^p}$$

Donc

$$10^k a_n \geq r + 10^k \frac{x_{k+1}}{10^(k+1} = r + \frac{x_{k+1}}{10}$$

Conclusion : r est un entier naturel et $10^k a_n \geq r + \dfrac{x_{k+1}}{10}$

ii) Montrons maintenant que $10^k b_n \leq r + \frac{x_{k+1}+1}{10}$

$$\begin{aligned}
10^k b_n &= 10^k \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right) = 10^k \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{x_p}{10^p} + \frac{1}{10^n}\right) \\
&= 10^k \sum_{p=1}^{k} \frac{x_p}{10^p} + 10^k \sum_{p=k+1}^{n} \frac{x_p}{10^p} + \frac{10^k}{10^n} \\
&= r + \frac{x_{k+1}}{10} + \sum_{p=k+2}^{n} \frac{x_p}{10^p - k} \\
&= r + \frac{x_{k+1}}{10} + \sum_{p=k+2}^{n} \frac{x_p}{10^{p-k}} + \frac{1}{10^{n-k}} \\
&= r + \frac{x_{k+1}}{10} + \sum_{p=1}^{n-k-1} \frac{x_{k+1+p}}{10^{p+1}} + \frac{1}{10^{n-k}}
\end{aligned}$$

Or x_p est un chiffre donc $x_p \leq 9$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
10^k b_n &\leq r + \frac{x_{k+1}}{10} + \sum_{p=1}^{n-k-1} \frac{9}{10^{p+1}} + \frac{1}{10^{n-k}} \\
&= r + \frac{x_{k+1}}{10} + \frac{9}{10} \sum_{p=1}^{n-k-1} \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{n-k}} \\
&\leq r + \frac{x_{k+1}}{10} + \frac{9}{10} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{10^p} \\
&\leq r + \frac{x_{k+1}}{10} + \frac{9}{100} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{10^p} \\
&= r + \frac{x_{k+1}}{10} + \frac{9}{100} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{10}} \\
&= r + \frac{x_{k+1}}{10} + \frac{9}{100} \frac{10}{9} \\
&= r + \frac{x_{k+1}}{10} + \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Conclusion

$$10^k b_n \leq r + \frac{x_{k+1}+1}{10}$$

iii) Montrons qu'il existe $\alpha_k \in \{-1, 1\}$ tel que

$$g(10^k b_n) - g(10^k a_n) = \alpha_k (b_n - a_n)$$

$g(10^k a_n)$ représente la distance à l'entier le plus proche. D'après la question 2), nous avons

Si $x_{k+1} \in [\![0, 4]\!]$ on a

$$g(10^k a_n) = \sum_{p=1}^{n-k} \frac{x_{k+p}}{10^p} \qquad \text{et} \qquad g(10^k n_n) = \sum_{p=1}^{n-k} \frac{x_{k+p}}{10^p} + \frac{1}{10^n}$$

Et donc

$$g(10^k b_n) - g(10^k a_n) = \frac{1}{10^n} = 1(b_n - a_n)$$

Si $x_{k+1} \in [\![5, 9]\!]$ nous avons

$$g(10^k a_n) = 1 - \sum_{p=1}^{n-k} \frac{x_{k+p}}{10^p} \qquad \text{et} \qquad g(10^k n_n) = 1 - \sum_{p=1}^{n-k} \frac{x_{k+p}}{10^p} + \frac{1}{10^n}$$

Et donc

$$g(10^k b_n) - g(10^k a_n) = -\frac{1}{10} = -1(b_n - a_n)$$

Conclusion : Pour tout k, il existe α_k tel que

$$g(10^k b_n) - g(10^k a_n) = \alpha_k (b_n - a_n)$$

c) Nous avons donc

$$\frac{g(10^k b_n) - g(10^k a_n)}{10^k} = \alpha_k (b_n - a_n)$$

En sommant sur k nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{g(10^k b_n)}{10^k} - \sum_{k=0}^{N} \frac{g(10^k a_n)}{10^k} = (b_n - a_n) \sum_{k=0}^{N} \alpha_k$$

Passons à la limite en N

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{b_n - a_n} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{g(10^k b_n)}{10^k} - \sum_{k=0}^{N} \frac{g(10^k a_n)}{10^k} \right) = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$$

Cette limite n'exite pas en effet, la série de terme général α_k diverge grossièrement, α_k ne convergent pas zéro. En résumé

— La suite a_n converge vers x

— La suite b_n converge vers x

— Le rapport $\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$ n'a pas de limite

La fonction f n'est donc pas dérivable en x

5) Nous avons donc construit, une fonction continue, 1-périodique sur $\mathbb{R}$ qui n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$