Exercice - M0341C

Nous avons pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$

$$\begin{aligned}
\Phi^2(f) &= \Phi\left(\frac{1}{2}(p \circ f + f \circ p)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(p \circ \left(\frac{1}{2}(p \circ f + f \circ p)\right) + \left(\frac{1}{2}(p \circ f + f \circ p)\right) \circ p\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(p^2 \circ f + 2p \circ f \circ p + f \circ p^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(p \circ f + 2p \circ f \circ p + f \circ p\right) \\
\Phi^3(f) &= \frac{1}{2}\left(p \circ \left(\frac{1}{4}\left(p \circ f + 2p \circ f \circ p + f \circ p\right)\right) + \left(\frac{1}{4}\left(p \circ f + 2p \circ f \circ p + f \circ p\right)\right) \circ p\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(p^2 \circ f + 2p^2 \circ f \circ p + p \circ f \circ p + p \circ f \circ p + 2p \circ f \circ p^2 + f \circ p^2\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(p \circ f + 2p \circ f \circ p + p \circ f \circ p + p \circ f \circ p + 2p \circ f \circ p + f \circ p\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(p \circ f + 6p \circ f \circ p + f \circ p\right)
\end{aligned}$$

On en déduit

$$p \circ f \circ p = 2\Phi^2(f) - \Phi(f)$$

Puis

$$\Phi^3(f) - \frac{1}{4}\Phi(f) - \frac{3}{4}(p \circ f \circ p) = 0$$

et

$$\Phi^3(f) - \frac{1}{4}\Phi(f) - \frac{3}{4}\left(2\Phi^2(f) - \Phi(f)\right) = 0$$

finalement

$$\Phi^3(f) - \frac{3}{2}\Phi^2(f) + \frac{1}{2}\Phi(f) = 0$$

Le polynome

$$P(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X = X\left(X - \frac{1}{2}\right)(X - 1)$$

Annule Φ, il est scindé à racine simple. Φ est donc diagonalisable.

Recherchons les éléments propres de Φ. Soit $(e_1, \cdots, e_r)$ une base de l'image p complété par des vecteur du noyaux de p. Dans cette base, la matrice de p est de la forme

$$P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit M la matrice de f et M' la matrice de $\Phi(f)$ dans cette base. Nous avons alors

$$M' = \frac{1}{2}(PM + MP)$$

Si f est un élément propre pour une valeur propre λ nous avons

$$\Phi(f) = \lambda f$$

Matriciellement nous avons

$$\frac{1}{2}(PM + MP) = \lambda M$$

En posant $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}\right) - \lambda \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}C & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Finalement

$$\begin{cases} (1-\lambda)A = 0 \\ \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)B = 0 \\ \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)C = 0 \\ \lambda D = 0 \end{cases}$$

Nous avons donc $Sp(\Phi) = \left\{0, 1, \frac{1}{2}\right\}$ et donc

$$\lambda = 0 \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \qquad M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$