Exercice - M0342C

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme diagonalisable de E.

1) Montrons que les sous espaces stables non réduit au vecteur nul sont engendrés par les vecteur propres de f.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteur propres, u_i associé à la valeur propre λ_i. Considérons le sous espace $F = \text{Vect}\{u_i \quad i \in I\}$. F est trivialement un sous espace stable par ff. En effet soit $x \in F$. x s'écrit comme combinaison linéaire des u_i

$$x = \sum_{i\in I} x_i u_i \implies f(x) = f\left(\sum_{i\in I} x_i u_i\right) = \sum_{i\in I} x_i f(u_i) = \sum_{i\in I} x_i \lambda_i u_i$$

$f(x)$ est donc combinaison linéaire des u_i et donc $f(x) \in \text{Vect}\{u_i \quad i \in I\}$, F est donc stable par f.

Réciproquement, montrons q'un sous espace stable est engendré par des vecteurs propres. Soit F un sous espace stable par f. Nous pouvons alors définir la restriction de f à F. Soit $g = f_{|F}$. f étant diagonalisable, sont polynomes minimal est scindé à racine simple. Le polynome minimal de g divise celui de f, il est donc scindé à racine simple et donc g est diagonalisable dans F. Il existe donc une base de F constituée de vecteurs propres de g. Or les vecteurs propres de g sont également des vecteurs propres de f. F est donc engendé par des vecteurs propres de f.

2) Si f admet n valeurs propres distinctes les sous espaces propres sont donc tous de dimension 1 et il y en a n, que nous appelerons $E_1, E_2, \cdots, E_n$. Soit e_i un vecteur non nul de E_i. e_i est donc une base de E_i et un vecteur propre de f. Soit

$$\mathbb{N}_n = \{1, 2, \cdots, n\} \qquad I \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$$

Nous avons évidement

$$\text{Vect}(e_i \quad i \in I) = \text{Vect}(x_i e_i \quad i \in I) \qquad \forall x_i \in K^\star$$

Le nombre de sous espace engendré par des vecteurs propres est donc égal au nombre de parties non vide de $\mathbb{N}_n$. Le cardinal de $\mathbb{N}_n$ est n, il y a donc $2^n - 1$ espace de la forme $\text{Vect}(e_i \qquad I)$ ou I est une partie de $\mathbb{N}_n$. Or les sous espaces de cette forme sont les sous espaces stables par f.

Conclusion : Le nombre de sous espaces stables par f est $2^n - 1$ ou n est la dimension de E et f un endomorphisme diagonalisable admettant n valeurs propres distinctes.

3) f admet une valeur propre double λ. Le sous espace propre E_λ associé à λ est de dimension 2. (Sinon f ne serait pas diagonalisable). Soit (u, v) une base de E_λ. Toute combinaison linéaire de u, v est encore un vecteur propre de f. En effet

$$f(xu + yv) = xf(u) + yf(v) = x\lambda u + y\lambda v = \lambda(xu + yv) \qquad (x, y) \in K^2$$

Soit $E_{xy} = \text{Vect}(xu + yv)$ $(x, y) \in K^2$. E_{xy} est un sous espace stable... et il y a une infinité de sous espace de ce type.