Exercice - M0346C

Montrons que $1 \implies 2$: p est un projecteur orthogonal. Soit $F = \ker p$. $E = F \oplus F^\perp$

$$\forall x \in E \quad x = u + v \quad u \in F \quad v \in F^\perp \qquad\qquad \forall y \in E \quad y = u' + v' \quad u \in F \quad v' \in F^\perp$$

On a alors

$$\begin{aligned} \langle p(x) \mid y \rangle &= \langle u \mid u' + v' \rangle = \langle u \mid u' \rangle + \langle u \mid v' \rangle = \langle u \mid u' \rangle \\ \langle x \mid p(y) \rangle &= \langle u + v \mid u'' \rangle = \langle u \mid u' \rangle + \langle v \mid u' \rangle = \langle u \mid u' \rangle \end{aligned}$$

Donc

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \langle p(x) \mid y \rangle = \langle x \mid p(y) \rangle$$

p est symétrique.

Montrons que $2 \implies 1$. Soit donc p un projecteur $F = \ker p$ et $G = \mathrm{Im}\ p$. Montrons que F et G sont orthogonaux, c'est-à-dire

$$\forall u, v) \in F \times G \qquad \langle u \mid \rangle = 0$$

Soit donc $u \in F$ et $v \in G$. Soit $x = u + v$ on a alors $p(x) = v$ et $u = x - v = x - p(x)$ donc

$$\langle u \mid v \rangle = \langle p(x) \mid x - p(x) \rangle = \langle x \mid p(x - p(x)) \rangle = \langle x \mid p(x) - p^2(x) \rangle = \langle x \mid p(x) - p(x) \rangle \langle x \mid 0 \rangle = 0$$

Donc u et v sont orthogonaux et donc $\ker p$ et $\mathrm{Im}\ p$ sont orthogonaux. p est un projecteur orthogonal

Montrons que $1 \implies 3$. p est un projecteur orthogonale. Pour tout $x \in E$ on a $x = p(x) + x - p(x)$ avec $x \perp x - p(x)$. Le théorème de Pythagore s'écrit

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$$

Donc

$$\|p(x)\| \leq \|x\|$$

Montrons que $3 \implies 1$. Nous avons pour tout $x \in E$ $\|p(x)\| \leq \|x\|$. Montrons que p est orthogonal. Comme précédement, $F = \ker p$ et $G = \mathrm{Im}\ p$. Montrons que F et G sont orthogonaux. Soit $(u, v) \in F \times G$. Considérons le vecteur $x = u + \lambda v$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ le corps de base. Nous avons, d'une part

$$p(x) = p(u) + \lambda p(v) = \lambda v \implies \|p(x)\|^2 = \lambda^2 \|v\|^2$$

et d'autre part

$$\|x\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v \mid u + \lambda v \rangle = \|u\|^2 + 2\lambda \langle u \mid v \rangle + \lambda^2 \|v\|^2$$

On a donc

$$\|p(x)\| \leq \|x\| \iff \lambda^2 \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\lambda \langle u \mid v \rangle + \lambda^2 \|v\|^2 \iff 0 \leq \|u\|^2 + 2\lambda \langle u \mid v \rangle$$

L'inégalité ne peut être vraie pour tout λ que si $\langle u \mid r \rangle = 0$, autrement dit si u et v sont orthognaux. p est donc un projecteur orthogonal. par

Conclusion : les trois propositions sont équivalentes.