Exercice - M0347C

Montrons qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $6k-1$ avec $k \in \mathbb{N}^{\star}$. Raisonons par l'absurde. Supposons qu'il y en ait un nombre fini. Soit N le plus grand. Considérons l'entier $M = 6N! - 1$. On a $M > N$ donc M n'est pas premier. Soit p un facteur de M. M est congru à 1 modulo 2 et modulo 3 donc M n'est divisible ni par 2, ni par 3 et donc $p \neq 2$ et $p \neq 3$ autrement dit $p \geq 5$.Considéons la division euclidienne de p par 6. On a $p = 6q + r$ avec $0 \leq r < 6$. r ne peut pas prendre les valeurs $0, 2, 3, 4$. Si tel était le cas, p ne serait pas premier. Il reste donc 1 et 5 donc $p = 6k - 1$ ou $p = 6k + 1$.

Si $p = 6k - 1$. On a $p \leq N \implies p | 6N!$. Or $p_i | M$ donc $p_i | 6N! - M$ autrement dit $p | 1$ (puisque $6N! - M = 1$) ce qui est impossible.

Si $p = 6k + 1$ on a alors $M \equiv 1 \pmod 6$, ce qui est en contradiction avec $M \equiv 5 \pmod 6$. En effet $M = 6N! - 1 = 6(N! - 1) + 5$

M n'a donc pas de diviseurs premiers, M est premier de la forme $6k-1$, ce qui est en contradiction avec N est le plus grand nombre premier de la forme $6k - 1$. il y a donc une infinité de nombres premiers de la forme $6k - 1$