

Exercice - M0349C

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons l'équivalence des propositions suivantes :

1. L'image réciproque de tout compact est compact,
2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = +\infty$

1) Montrons $1 \implies 2$.

Les compacts $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés. Soit $A > 0$, $[-A, A]$ est compact et par hypothèse, son image réciproque est compact, donc il existe $b > 0$ tel que $f^{-1}([-A, A]) \subset [-b, b]$. Autrement dit,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \notin [-b, b] \implies f(x) \notin [-A, A]$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x > b \implies |f(x)| > A \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x < -b \implies |f(x)| > A$$

En résumé,

$$\forall A > 0 \quad \exists b > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x > b \implies |f(x)| > A$$

et

$$\forall A > 0 \quad \exists b > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x < -b \implies |f(x)| > A$$

C'est exactement la définition d'une limite infinie en plus ou moins l'infini et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x)| = +\infty$$

2) Montrons que $2 \implies 1$

Soit K un compact de $\mathbb{R}$, montrons que $f^{-1}(K)$ est un compact. K est fermé, f est continue donc $f^{-1}(K)$ est fermé. Par ailleurs, K est borné donc il existe $A > 0$ tel que $K \subset [-A, A]$. Nous avons

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = +\infty$$

donc

$$\forall A > 0 \quad \exists b > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x > b \implies |f(x)| > A$$

et

$$\forall A > 0 \quad \exists a > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x < -a \implies |f(x)| > A$$

Autrement dit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \notin [a, b] \implies f(x) \notin [-A, A]$$

Et donc, par contraposée

$$x \in f^{-1}(K) \implies f(x) \in K \implies f(x) \in [-A, A] \implies x \in [a, b] \implies f^{-1}(K) \subset [a, b]$$

donc $f^{-1}(K)$ est borné et finalement $f^{-1}(K)$ est compact.

Conclusion : les deux propositions sont équivalentes.