Exercice - M0350C

Soit E un evn et H un hyperplan de E tel que $H = \ker f$ avec $f \in E^\star$ et $f \neq 0$.

Montrons que :

$$f \text{ continue} \iff H \text{ non dense dans } E$$

Supposons f continue. $H = \ker f = f^{-1}(0)$ donc H est fermé et donc $\bar{H} = H$. Or $H \neq E$ donc $\bar{H} \neq E$. H n'est pas dense dans E.

Réciproquement supposons que H ne soit pas dense dans E, montrons que f est continue.

$$H\text{non dense} \implies \bar{H} \neq E \implies \exists a \in E \text{ et } a \notin H \implies a$$

Autrement dit a appartient au complémentaire de H qui est ouvert. Donc il existe $r > 0$ tel que la boule fermée $B(a, r)$ de centre a et de rayon r et incluse dans $\complement_E H$, c'est-à-dire

$$\exists r > 0 \qquad B(a, r) \subset \complement_E H$$

f est bornée sur $B(a, r)$. En effet, supposons f non bornée, il existe $x \in B(a, r)$ tel que $|f(x) > 2|f(a)|$. On.a alors

$$|f(x) - f(a)| \geq ||f(x)| - |f(a)|| > |f(a)|$$

Posons

$$\lambda = \frac{-f(a)}{f(x) - f(a)} \qquad \text{et} \qquad y = (1 - \lambda)a + \lambda x$$

Nous avons alors

$$\lambda < 1 \text{ et } y - a = \lambda(x - a) \implies y \in B(a, r) \implies y \notin H$$

et

$$f(y) = f\left((1 - \lambda)a + \lambda x\right) = (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(x) = \left(1 - \frac{-f(a)}{f(x) - f(a)}\right) f(a) + \frac{-f(a)}{f(x) - f(a)} f(x) = 0$$

Donc $y \in H$. Il y a manifestement contradiction, f et donc bornée. Soit donc $M = \sup\limits_{x \in B(a,r)} |f(x)|$

$$\forall x \in E \quad x \neq a \qquad \frac{r}{\|x - a\|}(x - a) \in B(a, r)$$

Donc

$$\left| f\left(\frac{r}{\|x - a\|}(x - a)\right) \right| \leq M \implies |f(x) - f(a)| \leq \frac{M}{r}\|x - a\|$$

f est donc continue en a. f étant linéaire on en déduit la linéarité sur E.

Remarque : On a l'équivalence : H non dense $\iff$ H ferme dans E

Source : oral concours polytechnique