Exercice - M0351C

Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

$$\forall (x,y) \in A^2 \quad \forall t \in [0,1] \qquad (1-t)x + ty \in A$$

1) Montrons que $\bar{A}$ est convexe. Soit donc $(x,y) \in \bar{A}^2$. Il existe deux suites (x_n) et (y_n) de A convergeant respectivement vers x et y. Soit $t \in [0,1]$ et (z_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad z_n = (1-t)x_n + ty_n$$

A étant convexe, $z_n \in A \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = (1-t)\lim_{n\to\infty} x_n + t\lim_{n\to\infty} y_n = (1-t)x + ty$$

La limite de (z_n) appartient à $\bar{A}$ donc $(1-t)x + ty$ appartient à $\bar{A}$. $\bar{A}$ est convexe.

Montrons que $\mathring{A}$ est convexe. Soit $(x,y) \in \mathring{A}^2$. Il existe $r \in \mathbb{R}^{+\star}$ tel que

$$B_o(x,r) \subset A \qquad B_o(y,r) \subset A$$

Autrement dit

$$\forall u \in E \qquad \|u\| < r \implies x + u \in A \quad \text{et} \quad y + u \in A$$

Soit $t \in [0,1]$, posons $z = (1-t)x + ty$

$$\forall u \in E \quad \forall t \in [0,1] \qquad z+u = (1-t)x+ty+u = (1-t)x+ty = (1-t)u+tu = (1-t)(x+u)+t(y+u)$$

Donc pour $u \in E$ tel que $\|u\| < r$, $z \in \mathring{A}$ et donc $\mathring{A}$ est convexe.

2) Montrons que l'application $\varphi \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow d(x,A)$ est convexe.

$$\varphi \text{ convexe} \iff \forall (x,y) \in E^2 \quad \forall t \in [0,1] \qquad \varphi((1-t)x + ty) \leq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y)$$

Soit donc $(x,y) \in E^2$, $(x',y') \in A^2$ et $t \in [0,1]$. Posons $z = (1-t)x + ty$ et $z' = (1-t)x' + ty'$

$$z - z' = 1-t)x + ty - ((1-t)x' + ty') = (1-t)(x - x' + t(y - y')$$

et donc

$$\|z - z'\| = \|(1-t)(x - x' + t(y-y')\| \leq (1-t)\|x - x'\| + t\|y - y\|$$

En passant au borne inférieure

$$\inf_{z'\in A} \|z - z'\| \leq \inf_{x'\in A} (1 - t\|x - x'\| + t \inf_{y'\in A} \|y - y'\|$$

et

$$d(z,A) \leq (1-t)d(x,A) + td(y,A)$$

Finalement

$$\varphi(z) \leq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y)$$

et

$$\varphi\left((1-t)x + ty\right) \leq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y)$$

φ est convexe.

Source : Oral concours Centrale