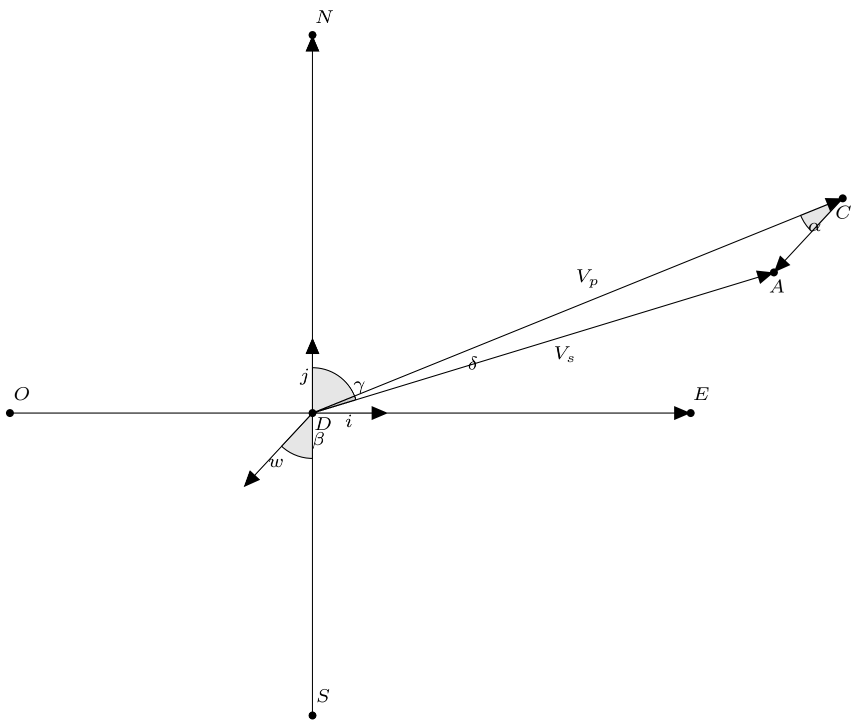
Exercice - P0006C

La ville D (départ) est située à 250 miles nautique de A (arrivée), et le cap relevé sur la carte est 73°. Un avion de tourisme a une vitesse de croisière de 100 noeuds (Exemple Cesna 172). La météo annonce un vent de secteur nord est à 43° et d'une vitesse de 30 noeuds.

1) Calculons le cap à prendre. Fixons d'abord quelques notations :

- D le point représentatif de la ville de départ
- Soit le repère $(D, \vec{j}, \vec{i})$ avec $\vec{j}$ dirigé vers le nord et D la ville de départ
- $\vec{i}$ unitaire tel que $(\vec{j}, \vec{i}) = \dfrac{\pi}{2}$. Les angles sont comptés positivement dans le sens horaire.
- $\vec{V}_p$ la vitesse propre de l'avion (donc $\|\vec{V}_p\| = 100\text{Kt}$)
- $\vec{V}_s$ la vitesse de l'avion par rapport au sol
- γ le cap (angle $\vec{j}, \overrightarrow{DA}$))
- $\vec{W}$ la vitesse du vent
- β la direction du vent
- γ le cap sans vent (c'est-à-dire l'angle $(\vec{j}, \overrightarrow{DA})$ compté dans le sens horaire donc dans le sens inverse du sens trigonométrique habituel.

La figure ci-après représente la situation.



Le cap à prendre est évidement

$$(\vec{j}, \vec{V}_p) = (\vec{j}, \vec{V}_s) + (\vec{V}_s, \vec{V}_p) = \gamma - \delta$$

Calculons l'angle de dérive δ. Nous avons, d'une part

$$\beta = (\vec{j}, -\vec{W}) \implies (\vec{j}, \vec{W}) = \pi + \beta$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\alpha &= (-\vec{V}_s, -\vec{W}\\ &= (-\vec{V}_s, -\vec{j}) + (-\vec{j}, -\vec{W})\\ &= (\vec{V}_s, \vec{j}) + \vec{j}, \vec{W})\\ &= -\gamma + (\pi + \beta)\end{aligned}$$

La formule des sinus appliquée au triangle DAC nous donne

$$\frac{\sin\delta}{\|\vec{W}\|} = \frac{\sin\alpha}{\|\vec{V}_p\|} \implies \sin\delta = \frac{W}{V_p}\sin\alpha$$

Conclusion

$$\delta = \arcsin\left(\frac{W}{V_p}\sin\alpha\right)$$

Numériquement, nous avons

$$\beta = 43° \qquad \gamma = 73° \implies \alpha = -73 + 180 + 43 = 150° \implies \sin\alpha = \sin(\pi - \alpha) = \sin(30°) = \frac{1}{2}$$

et donc

$$\delta = \arcsin\left(\frac{30}{100}\frac{1}{2}\right) = \arcsin\frac{3}{20} = 8,6°$$

Conclusion le cap à suivre 64°

2) Calculons la vitesse effective de l'avion, c'est-à-dire sa vitesse par rapport au sol. La formule des cosinus appliquée au triangle DAC donne

$$V_s^2 = V_p^2 + W^2 - 2 \cdot V_p \cdot W \cdot \cos(\pi - \alpha - \delta)$$

Numériquement nous obtenons

$$V_s = \sqrt{100^2 + 30^2 - 2 \times 100 \times 30 \cos(180 - 150 - 8,6)} = 73 \text{ Kt}$$

Nous en déduisons le temps de parcours

$$T = \frac{AD}{V_s} = \frac{130}{90} = 1,79 \text{ h}$$

Conclusion : le temps de trajet est 1h47