Exercice - P0009C

Le réféntiel terreste étant supposé Galiléen, on peut appliquer la relation fondamentale de la dynamique à la voiture.

$$m\vec{a} = \vec{R} + \vec{P}$$

ou $\vec{P}$ désigne le poid et $\vec{R}$ la réaction de la route. Exprimons cette relation vectorielle dans la base de Frenet. Soit $\vec{t}$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire, $\vec{n}$ le vecteur normal. Compte-tenu des caractéristiques de la trajectoire, ces deux vecteurs sont dans le plan horizontal. $\vec{k}$ est un vecteur perpendiculaire au plan de la trajectoire orienté vers la vecticale ascendante.

$$m\frac{dv}{dt}\vec{t} + m\frac{v^2}{R}\vec{n} = R_n\vec{k} - mg\vec{k} + R_t\vec{n}$$

La vitesse étant constante l'accélération tangentielle est nulle. En effet

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

Il nous reste

$$m\frac{v^2}{R}\vec{n} = R_n\vec{k} - mg\vec{k} + R_t\vec{n}$$

On en déduit immédiatement en projection sur Oz

$$Rz = mg$$

En projection sur la direction $\vec{n}$

$$m\frac{v^2}{R} = R_n$$

Or dans les interactions de contact

$$|R_t| \leq f|R_n|$$

Il en résulte

$$m\frac{v^2}{R} \leq fmg$$

et finalement

$$v \leq \sqrt{fgr}$$

Si maintenant la route est relevé d'un angle α les composantes de la réaction de la route sont modifée. On conserve notre repère $(M, \vec{t}, \vec{n}, \vec{k})$. En projection sur les trois axes nous avons

$$\begin{cases} 0 = R_{t,t} \\ m\frac{v^2}{R} = R_{t,n}\cos\alpha + R_n\sin\alpha \\ 0 = -R_{t,n}\sin\alpha + R_n\cos\alpha - mg \end{cases}$$

La composante tangentielle de $\vec{R}$ est suivant le vecteur $\vec{n}$, il n'y a pas de composante sur $\vec{t}$. Nous allégons donc lécriture en posante $R_{t,n} = R_t$. A la limite du glissement, nous avons $R_t = fR_n$, il vient

$$\begin{cases} -fR_n\sin\alpha + R_n\cos\alpha = mg \\ fR_n\cos\alpha + R_n\sin\alpha = m\frac{v^2}{R} \end{cases}$$

$$\frac{v^2}{gR} = \frac{f\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha}$$

En posant

$$\tan\phi = \frac{R_t}{R_n}$$

On obtient

$$v^2 = gR\frac{\tan\phi\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \tan\phi\sin\alpha}$$

$$v^2 = gR\frac{\sin\phi\cos\alpha + \cos\phi\sin\alpha}{\cos\phi\cos\alpha - \sin\phi\sin\alpha}$$

$$v^2 = gR\frac{\sin(\alpha+\phi)}{\cos(\alpha+\phi)} = gR\tan(\alpha+\phi)$$

Conclusion

$$v^2 = gR\tan(\alpha+\phi)$$