Exercice - P0012C

Les quatres mouches sont aux sommets d'un carré. Chaque mouche poursuit la suivante. Soit M, le point représentatif de la position d'une des mouches et O le centre du carré et enfin $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs orthogonaux et de norme 1. Nous avons

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\
\vec{v} &= \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \\
\overrightarrow{OM} &= r\vec{u} \qquad \|\vec{u}\| = 1 \\
\vec{V} &= \dot{r}\vec{u} + r\dot{\theta}\vec{v}
\end{aligned}$$

Par raison de symétrie, les mouches restent aux sommets d'un carré. L'angle entre le vecteur $\vec{u}$ et le vecteur vitesse est constant. Dans le cas du carré, et en désignant par M' le point représentatif de la mouche poursuivie

$$\overrightarrow{MM'} = r\vec{v} - r\vec{u} = r(\vec{v} - \vec{u})$$

Le vecteur vitesse $\vec{V}$ et le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sont colinéaires. Il en résulte

$$\dot{r} = -kr \qquad r\dot{\theta} = kr$$

d'ou

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -kr \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = k$$

et finalement

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r \iff \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -1 \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\ln r) = -1$$

En intégrant il vient

$$\ln r - \ln r_0 = -(\theta - \theta_0) \iff \ln\frac{r}{r_0} = -(\theta - \theta_0)$$

Et finalement

$$\boxed{r = r_0\exp(\theta_0 - \theta)}$$

Il s'agit d'une spirale logarithmique. Exprimons l'abscisse curviligne afin de calculer la longeur parcourue par la mouche.

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + (r\mathrm{d}\theta)^2 \iff \mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}r^2 + (r\mathrm{d}\theta)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta$$

donc en tenant compte de l'expression de r, il vient

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r_0^2e^{2(\theta_0-\theta)} + r_0^2e^{2(\theta_0-\theta)}} = \sqrt{2}r_0e^{\theta_0-\theta}$$

Il reste à intégrer pour obtenir la longueur

$$L = \int_{\theta_0}^{+\infty}\mathrm{d}s = \int_{\theta_0}^{+\infty}\sqrt{2}r_0e^{\theta_0-\theta}\mathrm{d}\theta = \left[-\sqrt{2}r_0e^{\theta_0-\theta}\right]_{\theta_0}^{+\infty} = \sqrt{2}r_0$$

r_0 s'exprime avec la longueur du coté du carré ℓ. r_0 correspond à une demi diagonale donc $r_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ell$. et donc

$$L = \sqrt{2}\frac{1}{2}\sqrt{2}\ell = \ell$$

Conclusion : en se rencontrant au centre du carré, les mouches auront parcourr une distance égale au coté du carré. Volant à vitesse constante, elle rencontre au bout d'un temps égal à $\frac{\ell}{V}$.

Remarque, on peut géneraliser le problème à n mouches aux sommets d'un polygone régulier. Par raison de symétrie, les mouches restent aux sommets d'un polygone régulier. Dans ce cas l'angle entre le rayon vecteur $\vec{r}$ et la vitesse est encore constant. En effet, considérons M_i et M_{i+1} les points représentatifs de deux mouches successives et O le centre du polygone. Il y a n mouches donc

$$\widehat{\overrightarrow{OM_i}, \overrightarrow{OM_{i+1}}} = \frac{2\pi}{n}$$

Le triangle OM_iM_{i+1} est isocèle. Posons

$$\alpha = \widehat{\overrightarrow{M_iO}, \overrightarrow{M_iM_{i+1}}} \qquad \beta = \pi - \alpha$$

$$\widehat{\overrightarrow{OM_i}, \overrightarrow{OM_{i+1}}} + 2\alpha = \pi \iff \frac{2\pi}{n} + 2\alpha = \pi \iff \alpha = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$$

On en déduit l'angle entre la vitesse $\vec{V}$ et le rayon vecteur $\vec{u}$

$$\beta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}$$

Nous avons alors

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right) = \frac{r\dot{\theta}}{\dot{r}}$$

Or

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{-\sin\frac{\pi}{n}} = -\frac{1}{\tan\frac{\pi}{n}}$$

donc

$$\frac{r\dot{\theta}}{\dot{r}} = -\frac{1}{\tan\frac{\pi}{n}} \iff \frac{\mathrm{d}r}{r\mathrm{d}\theta} = -\tan\frac{\pi}{n} \iff \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\tan\frac{\pi}{n}\mathrm{d}\theta$$

Il vient

$$\ln\frac{r}{r_0} = -\tan\frac{\pi}{n}(\theta - \theta_0)$$

et finalement

$$r = r_0 \exp\left(-\tan\frac{\pi}{n}(\theta - \theta_0)\right)$$