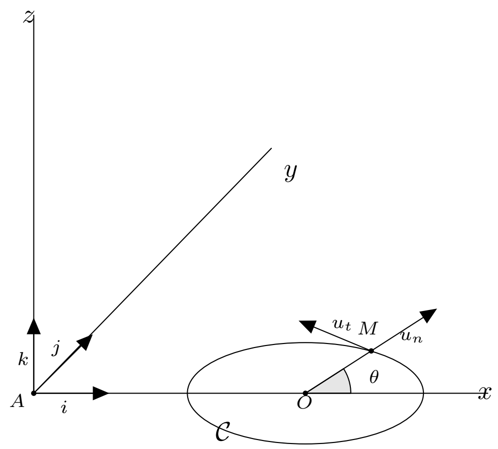
Exercice - P0013C

Nous étudions le mouvement d'un point matériel de masse m, repéré par le point M, en mouvement sur un cercle $\mathcal{C}$ horizontal de centre O et de rayon r. Le cercle $\mathcal{C}$ est en mouvement de rotation autour d'un d'un axe vertical Δ. La distance du centre O à l'axe Δ est notée R.

Fixons quelques notations :

1. A est le point d'intersection de l'axe Δ et du plan horizontal contenant le cercle $\mathcal{C}$.
2. Le vecteur $\vec{i}$ est colinaire à $\overrightarrow{AO}$ et de norme 1
3. $\vec{k}$ est un vecteur directeur de Δ unitaire et dirigé selon la verticale ascendante.
4. $\vec{j}$ est tel que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit directe. En résumé, le repère $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère tournant.
5. $\vec{u}_t$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire en M
6. $\vec{u}_n$ le vecteure unitaire colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{OM}$

La figure ci-dessous précise la situation.



Nous avons les relations vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{u}_t &= -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} & \qquad \vec{i} &= -\sin\theta\vec{u}_t + \cos\theta\vec{u}_n \\ \vec{u}_n &= \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} & \qquad \vec{j} &= \cos\theta\vec{u}_t + \sin\theta\vec{u}_n \end{aligned}$$

Le point matériel est soumis aux forces suivantes :

- on poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$.
- la réaction du cercle sur le point. En l'absence de frottements : $\vec{F} = F_n u_n \vec{u} + F_k \vec{k}$.
- la force d'inertie d'entrainement : $\vec{f_e} = m\omega\overrightarrow{AM}$). Calculons plus précisément la force d'entrainement.

$$\begin{aligned} \vec{f_e} &= m\omega^2(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) \\ &= m\omega^2\left[(R + r\cos\theta)\vec{i} + r\sin\theta\vec{j}\right] \\ &= m\omega^2\left[(R + r\cos\theta)(-\sin\theta\vec{u}_t + \cos\theta\vec{u}_n) + r\sin\theta(\cos\theta\vec{u}_t + \sin\theta\vec{u}_n)\right] \\ &= m\omega^2\left[-R\sin\theta\vec{u}_t + (R\cos\theta + r)\vec{u}_n\right] \end{aligned}$$

Finalement

$$\vec{f_e} = m\omega^2\left[-R\sin\theta\vec{u}_t + (R\cos\theta + r)\vec{u}_n\right]$$

– la force d'inertie de Coriolis : $\vec{f_c} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$

$$\begin{aligned}\vec{f_c} &= -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} \\ &= -2m\omega\vec{k} \wedge \left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\vec{u}_t \\ &= -2m\omega r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{k} \wedge \vec{u}_t \\ &= 2m\omega r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u}_n\end{aligned}$$

Finalement

$$\vec{f_c} = 2m\omega r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u}_n$$

Calculons le vecteur accélération, dans le repère tournant

$$\vec{\gamma} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u}_t - \frac{v^2}{r}\vec{u}_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\vec{u}_t - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\vec{u}_n = r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\vec{u}_t - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\vec{u}_n$$

Appliquons la deuxième loi de Newton

$$m\vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{f_e} + \vec{f_c}$$

En projections sur les axes $\vec{u}_t$, $\vec{u}_n$ et $\vec{k}$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}mr\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= -m\omega^2 R\sin\theta \\ -mR\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= F_n + m\omega^2(R\cos\theta + r) + 2m\omega r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ 0 &= -mg + F_k\end{aligned}$$

Les deux dernières égalités permettent de calculer la réaction du cercle $\vec{F}$. La première nous conduit à l'équation diffentielle régissant le mouvement du point M.

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\frac{R}{r}\sin\theta = 0$$

Recherchons les positions déquilibre. On a alors $\vec{\gamma} = \vec{0}$ donc $\sin\theta = 0$ et donc $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Etutions les mouvements au voisinage des positions d'équilibre.

Au voisinage de $\theta = \pi$: posons $\theta = \pi + \epsilon$. Il vient

$$\frac{\mathrm{d}^2\epsilon}{\mathrm{d}t^2} - \omega^2\frac{R}{r}\epsilon = 0$$

La solution de l'équation est de la forme

$$\epsilon(t) = \lambda e^{\Omega t} + \mu e^{-\Omega t} \qquad \text{avec} \qquad \omega^2 = \omega^2\frac{R}{r}$$

Il s'agit donc d'une position d'équilibre instable ne conduisant pas à un mouvement oscilatoire.

Au voisinage de $\theta = 0$: posons $\theta = \epsilon$. Il vient, en considérant l'approximation $\sin\epsilon = \epsilon$

$$\frac{\mathrm{d}^2\epsilon}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\frac{R}{r}\epsilon = 0$$

La position est donc une position d'équilibre stable donnant des oscilations de période

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \qquad \text{avec} \qquad \omega^2 = \omega^2\frac{R}{r}$$

Conclusion : la période des oscilation est

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{r}{R}}$$