Exercice - P0053C

1) On 'etudie le mouvement d'un avion de masse dans le réféntiel terrestre supposé galiléen. Les forces appliquées au système sont les suivantes :

1. Le poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
2. La force de traction (ou de propulsion) due au groupe motopropulseur : $\vec{T}$
3. La résultante des forces aérodynamique : $\vec{R_a}$

2) On considère le repère orthonormé direct $O(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ou $\vec{i}$ est un vecteur unitaire dans la direction et le sens du mouvement, $\vec{k}$ un vecteur unitaire vertical orienté vers le haut, et enfin $\vec{j}$, vecteur unitaire tel que $O(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit direct. l'expression des forces est la suivante

$$\begin{aligned}\vec{P} &= m\vec{g} = -mg\vec{k}\\ \vec{T} &= T\vec{i}\\ \vec{R_a} &= R_{ax}\vec{i} + R_{az}\vec{k}\end{aligned}$$

L'avion vole horizontalement à vitesse constante. D'après la première loi de Newton (principe de l'inertie), le système est isolé ou pseudo isolé. Autrement dit :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R_a} = \vec{0}$$

Autrement dit

$$-mg\vec{k} + T\vec{i} + R_{ax}\vec{i} + R_{az}\vec{k} = (R_{ax} + T)\vec{i} + (-mg + R_{az})\vec{k} = \vec{0}$$

On en déduit alors la composante verticale de la force aérodynamique.

$$R_{az} = mg$$

Conclusion : la composante verticale de la résultante dynamique, c'est-à-dire la portance est égale au poids.

3) Reprenons l'égalité vectorielle établie à la question 2). On en dédtuit

$$R_{ax} + T = 0 \implies R_{ax} = -T \implies \vec{R_a} = -\vec{T}$$

Conclusion : la composante horizontale de la résultante aérodynamique, c'est-à-dire la trainée est égale à la force de traction (ou de propulsion) due au groupe motopropulseur.

4) On considère maintenant le cas du virage horizontal. Le bilan des forces reste le même, mais cette fois la somme des forces n'est plus nulle. Le principe fondament de la dynamique (la deuxième loi de Newton) conduit à :

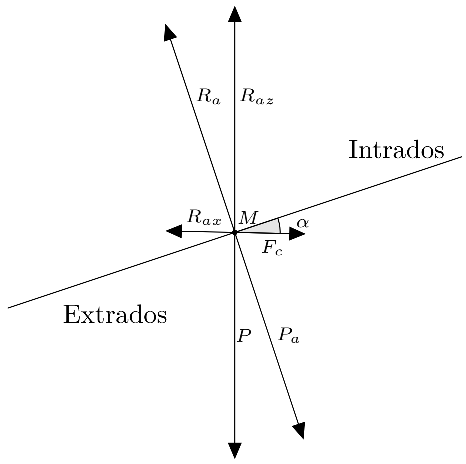
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R_a}$$

Exprimons les vecteurs dans la repère de Serret-Frenet $M(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$. Rappelons les caractéristiques de ces vecteurs.

- $\vec{t}$: vecteur unitaire colinéaire à la vitesse
- $\vec{b}$: vecteur unitaireégal à $\vec{k}$ la trajectoire étant horizontale
- $\vec{n}$: vecteur unitaire normal à $\vec{t}$ et $\vec{b}$, ce vecteur est dans le plan de la trajectoire dirigé par $\vec{V}$ et $\vec{a}$

Nous avons alors, en désignant par α l'angle d'inclinaison (roulis).

$$\begin{aligned}\vec{P} &= -mg\vec{b}\\ \vec{R_a} &= R_{at}\vec{t} + R_{ax}\vec{t} + R_a \sin\alpha\vec{n} + R_a\cos\alpha\vec{b} + T\vec{t}\\ \vec{T} &= T\vec{t}\\ \vec{a} &= \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\vec{t} + \frac{V^2}{R^2}\vec{n}\end{aligned}$$



Le principe fondamental conduit à :

$$m\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\vec{t}+\frac{V^2}{R^2}\vec{n}\right)=-mg\vec{b}+R_a\sin\alpha\vec{n}+R_a\cos\alpha\vec{b}$$

Et donc

$$\left(m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}-R_{ax}-T\right)\vec{t}+\left(\frac{V^2}{R^2}-R_a\sin\alpha\right)\vec{n}+(mg-R_a\cos\alpha)\vec{b}=\vec{0}$$

D'ou trois équations scalaires

$$m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}-R_{ax}-T=0 \qquad m\frac{V^2}{R^2}=R_a\sin\alpha \qquad mg=R_a\cos\alpha$$

La vitesse étant contante $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$, il vient alors

$$R_{ax}=-T \qquad R_a=\frac{mg}{\cos\alpha} \qquad \frac{V^2}{R}=g\tan\alpha$$

Calculons maintenant le poid apparent, qui peut être vu comme la somme des forces de pesanteur (le poids) et des forces d'accélération (ici la force centrifuge) ou comme la norme de $\vec{R_a}$

$$R_a=P_a=\sqrt{(mg)^2+\left(m\frac{V^2}{R}\right)^2}=\sqrt{(mg)^2+(mg\tan\alpha)^2}=mg\sqrt{1+\tan^2\alpha}$$

Nous obtenons finalement le facteur de charge, rapport du poids apparent au poids

$$n=\frac{P_a}{P}=\frac{mg\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{mg}=\frac{1}{\cos\alpha}$$

Conclusion : le facteur de charge ne dépend que de l'inclinaison de l'appareil

$$n=\frac{1}{\cos\alpha}$$

Ainsi, à 60°, on prend 2g...

5) Exprimons le rayon de virage

$$R_{ab}=\frac{1}{2}C_z\rho V^2 \qquad R_{at}=\frac{1}{2}C_x\rho V^2$$

Ou C_x et C_z désignent respectivement le coefficient de trainée et le coefficient de portance. En reprenant les équation précédement établie nous obtenons

$$\frac{V^2}{R}=R_a\sin\alpha \implies R=\frac{mV^2}{R_a\cos\alpha}=\frac{mV^2}{mg\tan\alpha}$$

Conclusion : le rayon de virage est donné par

$$\frac{V^2}{g \tan \alpha}$$

Il augment avec la vitesse et diminue avec l'inclinaison de l'appareil.

5) Exprimons le taux de virage, c'est-à-dire la vitesse angulaire de l'appareil, (de combien de degré évolue le cap par seconde).

$$\omega = \frac{V}{R}$$

Or

$$\frac{1}{R} = \frac{g \tan \alpha}{V^2} \implies \frac{V}{R} = \frac{g \tan \alpha}{V}$$

Conclusion : le taux de virage est :

$$\omega = \frac{g \tan \alpha}{V}$$

Il est proportionnel à la tangente de l'angle. Plus l'inclinaison est grande plus ca tourne... Il est inversement proportionnel à la vitesse, autrement plus la vitesse est élevée plus c'est difficile de changer de cap.