1) D'après les lois de Descartes, le rayon incident, le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le même plan. Une figure plane est donc légitime

2) La loi de la réfraction donne directement

$$\boxed{n_0 \sin i = n \sin r}$$

3) Le triangle $IO\Omega$ est isocèle donc

$$\boxed{r = r'}$$

4) Au point Ω le rayon passe d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent. Il y a donc un angle maximal pour la réfraction. Au delà il y a réflexion totale.

En notant γ l'angle d'incidence et β l'angle de réfraction

$$n \sin\gamma = n_0 \sin\beta$$

Or $\sin\beta \leq 1$ donc $\sin\gamma \leq \frac{n_0}{n}$

L'incidence limite γ_ℓ est telle que $\sin\gamma_\ell = \frac{n_0}{n}$.

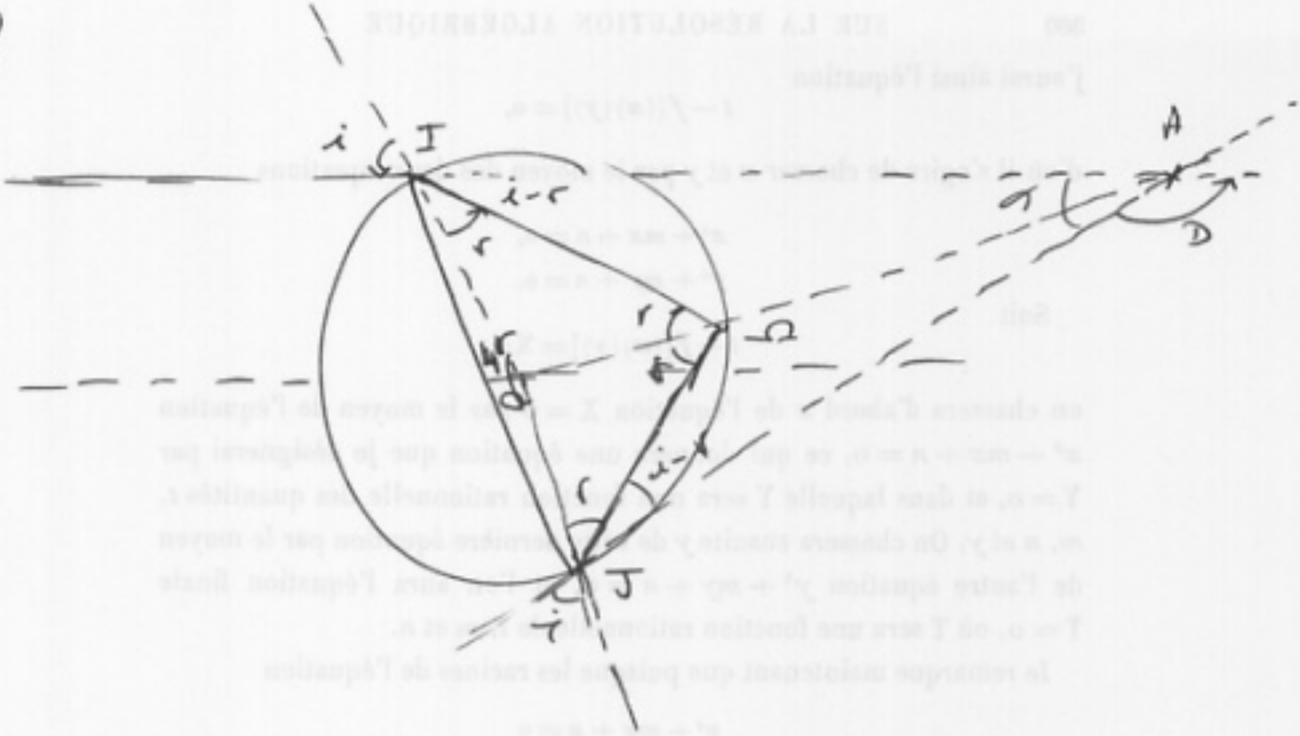
$$\sin r' = \sin r = \frac{n_0}{n} \sin i$$

donc

$$\sin r' \leq \frac{n_0}{n} \quad \text{et donc} \quad r' \leq \gamma_\ell$$

$$\boxed{\text{Il y a réflexion partielle au point } \Omega}$$

5)



Les lois de la réflexion et de la réfraction permettent de compléter la figure avec les différents angles. On en déduit alors

mes $\widehat{IOJ} = 4r$.

mesure $\widehat{OIJ} = \dfrac{\pi - 4r}{2}$

En écrivant la somme des angles du triangle IAJ on obtient

$$\left(\frac{\pi-4r}{2}+i\right) + \left(\frac{\pi-4r}{2}+i\right) + \alpha = \pi$$

$$2i - 4r + \alpha = 0$$

et donc

$$2i - 4r + \pi - D = 0$$

$$\boxed{D = \pi + 2i - 4r}$$

6) $f(x) = \sin x$

$df = \cos x \, dx$ $\qquad df = \sqrt{1-\sin^2 x}\, dx$

7) Différentions la relation

$$n_0 \sin i = n \sin r$$

$$n_0 \cos i \, di = n \cos r \, dr$$

$$\frac{dr}{di} = \frac{n_0 \cos i}{n \cos r} = \frac{n_0\sqrt{1-\sin^2 i}}{n\sqrt{1-\sin^2 r}}$$

$$\frac{dr}{di} = \frac{n_0\sqrt{1-\sin^2 i}}{\sqrt{n^2 - n^2\sin^2 r}} \qquad \text{or} \quad n^2\sin^2 r = n_0^2 \sin^2 i$$

$$\boxed{\frac{dr}{di} = \frac{n_0\sqrt{1-\sin^2 i}}{\sqrt{n^2 - n_0^2\sin^2 i}}}$$

8) $D = \pi + 2i - 4r$ d'où

$$\frac{dD}{di} = 2 - 4\frac{dr}{di} \qquad \frac{dD}{di} = 2 - 4\frac{n_0\sqrt{1-\sin^2 i}}{\sqrt{n^2-n_0^2\sin^2 i}}$$

$$\frac{dD}{di}(i_0) = 0 \iff 2 - 4\frac{n_0\sqrt{1-\sin^2 i_0}}{\sqrt{n^2-n_0^2\sin^2 i_0}} = 0$$

$$\iff \frac{n_0\sqrt{1-\sin^2 i_0}}{\sqrt{n^2-n_0^2\sin^2 i_0}} = \frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{n_0^2 - n_0^2\sin^2 i_0}{n^2 - n_0^2\sin^2 i_0} = \frac{1}{4}$$

$$\iff 4n_0^2 - 4n_0^2\sin^2 i_0 = n^2 - n_0^2\sin^2 i_0$$

$$4n_0^2 - n^2 = 3n_0^2\sin^2 i_0$$

$$\sin i_0 = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{n^2}{3n_0}}$$

Pour le bleu $n_B = 1,337$

$$\sin i_0 = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{1,337^2}{3}} = 0,8587 \qquad i_{0\,Bleu} = 59,178°$$

Pour le rouge $n_R = 1,331$

$$\sin i_0 = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{1,331^2}{3}} = 0,8618 \qquad i_{0\,Rouge} = 59,527°$$

Nous en déduisons r_D par les lois de Descartes pour la réfraction

$$\sin r_B = \frac{\sin i_{0B}}{n_B} \qquad \sin r_R = \frac{\sin i_{0R}}{n_R}$$

$$r_B = 39,964° \qquad r_R = 40,356°$$

Puis $D = 180 + 2i - 4r$.

$$D_B = 180 + 2 \times 59,178 - 4 \times 39,961 \qquad D_R = 180 + 2 \times 59,527 - 4 \times 40,$$

$$\boxed{D_B = 138,5°} \qquad \boxed{D_R = 137,6°}$$

10) Pour observer l'arc en ciel il faut se placer dos au soleil

11) Le Rouge est à l'extérieur, le bleu à l'intérieur.